সরল গণিত—জ্যামিতি।

সরল গণিত।

তৃতীয় ভাগ।

জ্যামিতি।

শ্রীসার গুরুদাস বন্দ্যোপাধ্যায়, কেটি,
এম-এ, ডি-এল, পিএচ্-ডি,
প্রণীত।

Calcutta
S. K. LAHIRI & CO.
56, College Street
1914.

বিজ্ঞাপন।

বঙ্গভাষায় সরল জ্যামিতির পুস্তকের মধ্যে সর্ব্বাগ্রে বোধ হয় ৺কৃষ্ণমোহন বন্দ্যোপাধ্যায় মহাশয়ের প্রণীত ইউক্লিডের জ্যামিতির প্রথম ছয় অধ্যায়ের অনুবাদ প্রকাশিত হয়। তাহার পর ঐ গ্রন্থের আরও কয়েক খানি অনুবাদ প্রকাশিত হয়, তন্মধ্যে শ্রীযুক্ত ব্রহ্মমোহন মল্লিক মহাশয়ের প্রণীত অনুবাদ বিশেষ উল্লেখ যোগ্য। ইহাতে ইউক্লিডের জ্যামিতির প্রথম ছয় অধ্যায় এবং একাদশ ও দ্বাদশ অধ্যায়ের কিয়দংশ আছে। কিন্তু সেই সম্পূর্ণ সংস্করণ এখন দুষ্প্রাপ্য, কেবল প্রথম তিন চারি অধ্যায়ই সচরাচর পাওয়া যায়। তদভিন্ন, ইউক্লিডের জটিলতা ও বাহুল্য দোষ পরিত্যাগ পূর্ব্বক কিঞ্চিৎ নূতন প্রণালীতে একখানি জ্যামিতির গ্রন্থ ৺রামকমল ভট্টাচার্য্য মহাশয় কর্ত্তৃক প্রণীত হয়। তবে তাহাতে কতকগুলি কথা অতি সঙ্ক্ষেপে আলোচিত হইয়াছে, এবং ঘনায়তনের কোন কথাই আলোচিত হয় নাই। সে গ্রন্থখানিও এখন দুষ্প্রাপ্য।

ইউক্লিডের জ্যামিতি বহুশতাব্দী ব্যাপিয়া সরল জ্যামিতির একমাত্র পাঠ্য পুস্তক বলিয়া গৃহীত ও প্রচারিত হইয়া আসিতে ছিল। সেই পুস্তকের অনেক গুণ আছে, কিন্তু দোষও আছে। ইউক্লিডের প্রমাণ প্রণালীর যেমন সম্পূর্ণতা ও বিশুদ্ধতাগুণ আছে, তেমনই তাহার জটিলতা ও বাহুল্য দোষও আছে। এবং তাঁহার প্রতিজ্ঞা পারম্পর্য্য যেমন পরস্পরের অপেক্ষিতার প্রতি লক্ষ্য রাখিলে সুশৃঙ্খলাবদ্ধ বলিয়া মনে হয়, তেমনই প্রতিজ্ঞার বিষয়ের প্রতি দৃষ্টি করিলে শৃঙ্খলাবিহীন বলিয়া বোধ হয়। একই বিষয় সংসৃষ্ট দুটি প্রতিজ্ঞা অনেক স্থলে পর পর না থাকিয়া দশ বারটি প্রতিজ্ঞার অন্তরে, কখনও বা ভিন্ন ভিন্ন অধ্যায়ে, আলোচিত হইয়াছে। ইহাতে এক একটি প্রতিজ্ঞার পৃথক্ ভাবে উপপত্তি বোধ যদিও কিঞ্চিৎ সহজ হইয়াছে, কিন্তু তাহাদের সমষ্টির সংসৃষ্টভাবে সম্বন্ধের উপলব্ধি হওয়ার বাধা জন্মিয়াছে। এবং জ্যামিতি শিক্ষা দুরূহ বলিয়া লোকের ধারণা হইয়াছে।

এই সমস্ত কারণে ইউক্লিডের জ্যামিতির পরিবর্ত্তে কিঞ্চিৎ নূতন প্রণালীতে ইংরাজি ও অন্যান্য ইউরোপীয় ভাষায় অধুনা অনেকগুলি জ্যামিতির গ্রন্থ রচিত হইয়াছে। আমিও ইংরাজি ভাষায় ঐরূপ একখানি জ্যামিতি রচনা করিয়াছি। তাহাতে প্রমাণ প্রণালীর বিশুদ্ধতা ও সরলতা রক্ষা করিয়া, আবশ্যকীয় বিষয়গুলির আলোচনা সজ্ক্ষিপ্ত, ও প্রতিজ্ঞাগুলির পারম্পর্য্য সুশৃঙ্খলাবদ্ধ, করিতে যথাসাধ্য যত্ন করিয়াছি।

এই পুস্তকখানি আমার প্রণীত সেই সরল জ্যামিতির বঙ্গভাষায় অনুবাদ। ইহাতে কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের আই-ই এবং আই-এস্‌সি পরীক্ষা পর্য্যন্ত আবশ্যকীয় বিষয় সমস্তই আছে, এবং তদতিরিক্ত আরও কোন কোন বিষয় আছে।

বাঙ্গালা ভাষায় এখনও এ প্রণালীতে রচিত জ্যামিতির কোন পুস্তক প্রকাশিত হয় নাই। বঙ্গভাষায় এখন নানা বিষয়ে নানাবিধ গ্রন্থ রচিত হইতেছে। আধুনিক প্রণালীর একখানি জ্যামিতির বাঙ্গালা গ্রন্থ রচিত হওয়া বাঞ্ছনীয়, এই মনে করিয়া আমার ইংরাজি সরল জ্যামিতির এই বাঙ্গালা অনুবাদ প্রস্তুত ও প্রকাশিত করিলাম। ইহা পঠিত ও প্রচারিত হইবে কি না বলিতে পারি না। ইতি।

নারিকেলডাঙ্গা,
৬ই বৈশাখ ১৩২১।

শ্রীগুরুদাস বন্দ্যোপাধ্যায়।

সূচীপত্র।

বিষয় | পৃষ্ঠা

প্রথম অধ্যায়

ঋজুরেখা, কোণ, এবং ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র।

প্রথম পরিচ্ছেদ। পরিভাষা, স্বতঃসিদ্ধ, এবং স্বীকৃতকথা।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা।

১। সম্পাতী ঋজুরেখা।

২। সমান্তর ঋজুরেখা।

৩। ত্রিভুজের কোণের ও বাহুর পরস্পর সম্বন্ধ।

বিষয় — পৃষ্ঠা

দ্বিতীয় অধ্যায়।

বৃত্ত।

বিষয় পৃষ্ঠা

তৃতীয় অধ্যায়।

সমানুপাতী আয়তন এবং সদৃশ ক্ষেত্র।

বিষয় পৃষ্ঠা

চতুর্থ অধ্যায়।

সমতল ও ঘনায়তন।

বিষয়	পৃষ্ঠা

তৃতীয় ভাগ।

জ্যামিতি।

প্রথম অধ্যায়।

ঋজুরেখা, কোণ, এবং ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র।

প্রথম পরিচ্ছেদ।

পরিভাষা, স্বতঃসিদ্ধ, স্বীকৃতকথা।

১। পরিভাষা।

১। গণিতের যে ভাগে ঘনায়তন, পৃষ্ঠ, কোণ, রেখা, ও বিন্দুর বিষয়ের আলোচনা আছে তাহাকে **জ্যামিতি** বলে।

২। যাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ও বেধ আছে তাহাকে **ঘনায়তন** বলে।

৩। যাহার কেবল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে তাহাকে **পৃষ্ঠ** বা **তল** বলে।

টিপ্পনী। ঘনায়তনের সীমা বা উপরিভাগ পৃষ্ঠ, কারণ সেই সীমা বা উপরিভাগের বেধ নাই, কিন্তু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে।

৪। যাহার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও বেধ নাই, তাহাকে **রেখা** বলে।

টিপ্পনী। পৃষ্ঠ বা তলের সীমা রেখা, কারণ সেই সীমার বেধ নাই, প্রস্থও নাই, কিন্তু দৈর্ঘ্য আছে।

৫। যাহার বিস্তৃতি নাই, কেবল অবস্থিতি আছে, তাহাকে **বিন্দু** বলে।

টিপ্পনী। রেখার সীমা বিন্দু, কারণ সেই সীমার বেধ নাই, প্রস্থ নাই, দৈর্ঘ্যও নাই, কিন্তু অবস্থিতি আছে।

৬। যে রেখার সমস্তই কেবল একদিকগামী তাহাকে **ঋজু** বা **সরল** রেখা বলে।

৭। যে পৃষ্ঠ বা তলে যে কোন দুই বিন্দুর যোজক ঋজুরেখা সম্পূর্ণরূপে সেই তলের উপর থাকে তাহাকে **সমতল** বলে।

৮। যদি দুই ঋজুরেখা এক ঋজুরেখায় না থাকিয়া মিলিত হয়, তাহা হইলে তাহাদিগকে পরস্পরের প্রতি **অবনত** বলে, এবং তাহাদের অবনতিকে **সমতল ঋজুরৈখিক কোণ** বলে।

৯। যদি দুই ঋজুরেখা এক সমতলে থাকে, এবং উভয় দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্দ্ধিত করিলেও কোন দিকে মিলিত না হয়, তাহা হইলে তাহাদিগকে **সমান্তর ঋজুরেখা** বলে।

১০। যদি একটি ঋজু রেখা আর একটি ঋজু রেখার উপর এমত ভাবে দণ্ডায়মান থাকে যে সন্নিহিত কোণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে সেই কোণদ্বয়ের প্রত্যেককে **সমকোণ** বলে, এবং রেখাদ্বয়ের প্রত্যেককে অপরের উপর **লম্ব** বলে।

টিপ্পনী (১)। দুটি ঋজুরেখার মধ্যস্থ কোণের পরিমাণ নিরূপণার্থে, রেখাদ্বয়ের একটিকে অপরের সহিত মিলিত করিয়া পরে তাহাদিগের সম্পাত বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া সেই রেখাকে কতদূর ঘুরাইলে সে স্বস্থানে উপনীত হয় তৎপ্রতি দৃষ্টি রাখিলে, সেই ঘূর্ণনের অল্পতা বা আধিক্য কোণের পরিমাণনির্ণায়ক বলিয়া দেখা যাইবে। এবং এ ভাবে দেখিলে, কোণ পরিমাণে দুই সমকোণেরও অধিক হইতে পারে।

(২)। যে কোন রেখার নামকরণ তাহার আদি ও অন্তস্থিত অক্ষরের দ্বারা হয়। যথা রেখা **কখ**। অন্য রেখার সহিত অসংলগ্ন রেখার নামকরণ একটি অক্ষর দ্বারা হইতে পারে। যথা রেখা **ক**।

গ ক খ

ক

কোণের নামকরণ তিনটি অক্ষরের দ্বারা হইয়া থাকে, তাহার আদ্য ও অন্ত্য অক্ষর দুইটি কোণের বাহুদ্বয়ের অসংলগ্ন সীমাবিন্দুদ্বয়ে স্থিত, ও মধ্যঅক্ষর বাহুদ্বয়ের সম্পাতবিন্দুস্থিত। যথা কোণ **গকখ**। কোন বিন্দুতে একটিমাত্র কোণ থাকিলে তাহাকে সেই বিন্দুস্থিত একটি অক্ষরের দ্বারা অভিহিত করা যায়। যথা কোণ **ক**।

১১। সমকোণ অপেক্ষা ছোট কোণকে **সূক্ষ্ম কোণ** বলে।

১২। সমকোণ অপেক্ষা বড় কোণকে **স্থূল কোণ** বলে।

১৩। ঋজুরেখা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে **ঋজু রৈখিক ক্ষেত্র** বলে। তিনটি রেখাবেষ্টিত হইলে তাহাকে **ত্রিকোণ** বা **ত্রিভুজ,** চারিটি রেখা বেষ্টিত হইলে **চতুর্ভুজ,** এবং ততোধিক রেখা বেষ্টিত হইলে **বহুভুজ** বলে।

১৪। যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই সমান তাহাকে **সমবাহু** ত্রিভুজ বলে।

১৫। যে ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান তাহাকে **সমদ্বিবাহু** ত্রিভুজ বলে।

১৬। যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই অসমান তাহাকে **বিষম-বাহু** ত্রিভুজ বলে।

১৭। যে চতুর্ভুজের পরস্পর সম্মুখীন বাহু সমান্তর তাহাকে **সামান্তরিক** বলে।

১৮। যে সামন্তরিকের কোণ সমকোণ তাহাকে **আয়ত** বলে।

১৯। যে আয়তের সকল বাহু সমান তাহাকে **সমচতুর্ভুজ** বা **বর্গক্ষেত্র** বলে।

২০। যে সামান্তরিকের সকল বাহু সমান তাহাকে **সমবাহুচতুর্ভুজ** বলে।

২১। যদি কোন সামতলিক ক্ষেত্র এক রেখাদ্বারা এরূপে সীমাবদ্ধ হয় যে, তাহার অভ্যন্তরীণ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সীমা পর্য্যন্ত যত ঋজুরেখা টানা যায় তাহারা পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে সেই ক্ষেত্রকে **বৃত্ত** বলে, সেই রেখাকে তাহার **পরিধি** বলে, এবং সেই বিন্দুকে তাহার **কেন্দ্র** বলে।

২২। বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া উভয় দিকে পরিধি পর্য্যন্ত যে কোন ঋজুরেখা টানা যায় তাহাকে বৃত্তের **ব্যাস** বলে।

২৩। কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত যে ঋজুরেখা টানা যায় তাহাকে **ব্যাসার্দ্ধ** বলে।

সামান্ত টিপ্পনী। উপরে যে সকল পারিভাষিক লক্ষণ লিপিবদ্ধ হইল, তদ্দ্বারা জ্যামিতিতে ব্যবহৃত পারিভাষিক শব্দের অর্থ বিবৃত হইল, এবং সেই শব্দগুলি যে যে বস্তুবোধক তত্তৎ বস্তুর অস্তিত্বও মানিয়া লওয়া হইল। অর্থাৎ, বিন্দু, রেখা, সমান্তর ঋজুরেখা, বৃত্ত আদি শব্দ কি বুঝায় তাহা জানা গেল, এবং সেই সেই শব্দ যে যে বস্তু বুঝায় তত্তৎ বস্তু আছে এবং অঙ্কিত হইতে পারে ইহাও মানিয়া লওয়া গেল।

সত্য বটে, রেখা যত সূক্ষ্ম ভাবে টানা যাউক না কেন তাহার কিঞ্চিৎ প্রস্থ থাকিবে, এবং বিন্দু যত ক্ষুদ্রভাবে অঙ্কিত হউক না কেন তাহার কিঞ্চিৎ বিস্তৃতি থাকিবে। কিন্তু সেই প্রস্থ ও সেই বিস্তৃতি ধর্ত্তব্য বলিয়া মনে করা যায় না। এবং তাহা না করিলে অনেক অসুবিধা ঘটে। যথা, একটি ঋজুরেখা সমান দুই ভাগে ভাগ করিতে হইলে, তাহার মাঝখানে একটি বিন্দু অঙ্কিত করিয়া সেই ভাগ ক্রিয়া সম্পন্ন করা যায়। কিন্তু সেই বিন্দুর যদি বিস্তৃতি থাকে, তাহা হইলে তাহাকে দ্বিখণ্ড করিয়া তবে রেখার ঠিক মধ্যস্থল পাওয়া যাইবে। আর সেই বিন্দুর মধ্যস্থল যদি সূক্ষ্মতর বিন্দুদ্বারা অঙ্কিত করা যায়, সেই সূক্ষ্মতর বিন্দুরও কিঞ্চিৎ

বিস্তৃতি থাকিবে, এবং তাহাকে আবার দ্বিখণ্ড না করিলে ঠিক মধ্যস্থল পাওয়া যাইবে না। সুতরাং বিন্দুর বিস্তৃতি অগ্রাহ্য না করিলে ভাগ ক্রিয়ার শেষ হইবে না।

২৪। যে তত্ত্ব বিনাপ্রমাণে আপনা হইতেই প্রতীয়মান হয় তাহাকে **স্বতঃসিদ্ধ** বলে।

২৫। গণিতের যে কার্য্য অবশ্যই করা যাইতে পারে বলিয়া স্বীকার করিয়া লওয়া যায় তাহাকে **স্বীকৃত কথা** বলে।

২৬। প্রমাণ দ্বারা উপপন্ন করনীয় কোন তত্ত্বের উক্তিকে **উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা** বলে।

২৭। গণিতের প্রক্রিয়া দ্বারা সম্পাদিত করিবার কোন কার্য্যের উক্তিকে **সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা** বলে।

২৮। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় বলা হয়, যদি একটি কথা সত্য হয়, তবে আর একটি কথা সত্য হইবে। প্রথম কথাটিকে **কল্পিত তত্ত্ব** বা **হেতু,** ও দ্বিতীয়টিকে **অনুমিত তত্ত্ব** বা **সিদ্ধান্ত,** বলা যাইতে পারে।

যদি দুটি প্রতিজ্ঞার সম্বন্ধ এরূপ হয় যে প্রথমটির কল্পিত তত্ত্ব দ্বিতীয়টির অনুমিত তত্ত্ব, এবং প্রথমটির অনুমিত তত্ত্ব, দ্বিতীয়টির কল্পিত তত্ত্ব তাহা হইলে প্রতিজ্ঞাদ্বয়কে পরস্পরের **পরিবর্ত্ত** বলা যায়।

২। স্বতঃসিদ্ধ।

১। যে যে বস্তুর প্রত্যেকে কোন একই বস্তুর সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

২। সমানের সহিত সমান যোগ করিলে যোগফল সমান হইবে।

৩। সমান হইতে সমান বিযুক্ত করিলে বিযোগফল সমান হইবে।

৪। অসমানে সমানে যোগ করিলে যোগফল অসমান হইবে।

৫। অসমান হইতে সমান বিযুক্ত করিলে বিযোগফল অসমান হইবে।

৬। সমানের সমগুণিতক পরস্পর সমান।

৭। সমানের সমান অংশ পরস্পর সমান।

৮। অংশ অপেক্ষা সমগ্র বড়।

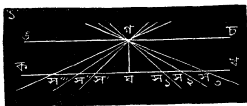
৯। যে যে আয়তন ঠিক মিলিত হয়, অর্থাৎ ঠিক একই স্থান পূরণ করে, তাহারা পরস্পর সমান।

১০। দুই ঋজুরেখা কোন স্থান বেষ্টিত করিতে বা আংশিক ভাবে মিলিতে পারে না।

১১। সকল সমকোণই সমান।

১২। দুটি সংলগ্ন ঋজুরেখা একই ঋজুরেখার সমান্তর হইতে পারে না।

টিপ্পনী। অধ্যাপক প্লেফেয়ারের মতে সমান্তর ঋজুরেখা সম্বন্ধে সময়ে সময়ে যতগুলি স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্বের উল্লেখ হইয়াছে তন্মধ্যে এইটি সর্ব্বাপেক্ষা সহজে বোধগম্য। সেই বিবেচনায় এইটি এস্থলে গ্রহণ করা গেল।

পশ্চাৎ লিখিত কথাগুলির প্রতি দৃষ্টি রাখিলে এই স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্বটি বুঝিবার সুবিধা হইবে।

মনে কর **কথ** একটি ঋজু রেখা, আর **গ** তাহার বাহিরে একটি বিন্দু, এবং **গঘ** **কথ**'র উপর লম্ব। আরও মনে কর একটি ঋজু রেখা **গ** কে কেন্দ্র করিয়া প্রথমে **গঘ**'র সহিত মিলিত থাকিয়া পরে ঘুরিয়া ক্রমশঃ $গস_{১}$, $গস_{২}$, $গস_{৩}$, **ঙগচ**, $গস'''$, $গস''$, $গস'$ স্থানে আইসে।

সেই ঘূর্ণ্যমান রেখার **কথ** রেখার সহিত সম্পাতবিন্দুগুলি যাহা **গঘ**র দক্ষিণে আছে, অর্থাৎ $স_{১}$, $স_{২}$, $স_{৩}$, .. **গ** হইতে ক্রমশঃ দূর হইতে আরও দূরে সরিয়া যাইবে, এবং শেষে যখন ঐ ঘূর্ণ্যমান রেখা **ঙগচ**'র স্থানে আসিবে তখন **কথ**'র সহিত তাহার সম্পাতবিন্দু অনন্তদূরে যাইবে। এবং তদনন্তর আর একটু মাত্র ঘূর্ণনে ঐ সম্পাতবিন্দু **গঘ**'র বামে যাইবে, ও তাহার পর ক্রমশঃ ঘূর্ণনে সম্পাতবিন্দুগুলি ক্রমশঃ $স'''$, $স''$, $স'$ স্থান দিয়া **ঘ**'র নিকটবর্ত্তী হইবে। কেবল একটিমাত্র স্থান **ঙগচ** আছে, যথায় অবস্থিত হইলে ঐ ঘূর্ণ্যমান রেখা কোনদিকেই **কথ**'র সহিত সংলগ্ন হইবে না, এবং সেই স্থানে অবস্থিতিকালে ঐ ঘূর্ণ্যমান রেখা **কথ** রেখার অভিমুখী হইয়া দক্ষিণে কি বামে কোন দিকেই অবনত হইবে না। আর ঐ স্থানে অবস্থিত রেখা **কথ**'র সমান্তর হইবে।

সামান্য টিপ্পনী (১)। স্বতঃসিদ্ধ ১ হইতে ৮ সর্ব্বপ্রকার পরিমেয় রাশি সম্বন্ধে খাটে। আর ৯ হইতে ১২ স্বতঃসিদ্ধ কেবল জ্যামিতি সংক্রান্ত অর্থাৎ আয়তনবিশিষ্ট রাশি সম্বন্ধে খাটে।

(২)। নবম স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্বের পরিবৃত্তি সকল স্থলে সত্য নহে। যথা, এক যোড়া পাদুকার এক পাটি অপর পাটির সহিত সমান, কিন্তু এক পাটি অপর পাটির স্থান পূরণ করিবে না, কারণ তাহাদের রোখ উল্টা।

(৩)। দশম স্বতঃসিদ্ধ ঋজু রেখার ঋজুত্বের পরীক্ষা দেখাইয়া দিতেছে। কোন একটি রেখা ঋজু কি না পরীক্ষা করিতে হইলে, তাহার অবিকল প্রতিকৃতি একটি অঙ্কিত করিয়া দেখ, দুইটিতে কোন স্থান বেষ্টিত করা যায় কি না। সমান বৃত্তের পরিধির অংশদ্বয় লইলে দেখা যাইবে এক ভাবে রাখিলে তাহারা স্থান বেষ্টন করে না, কিন্তু আর এক ভাবে রাখিলে তাহারা স্থান বেষ্টন করে।

(৪)। একাদশ স্বতঃসিদ্ধ ও দশম পারিভাষিক লক্ষণ একত্র লইতে হইবে। দশম পারিভাষিক লক্ষণ হইতেই দেখা যাইতেছে সকল সমকোণই সমান।

একাদশ স্বতঃসিদ্ধ হইতে মাটাম যন্ত্রের একটি পরীক্ষা পাওয়া যাইতেছে। একটি ঋজুরেখা টানিয়া তাহার উপর মাটামের একটি বাহু রাখিয়া অপর বাহু অনুসারে এক রেখা টান, এবং মাটাম উল্টাইয়া ধরিয়া সেই স্থানে তাহার সেই বাহু অনুসারে আর একটি রেখা টান। যদি ঐ দুইটি রেখা মিলিয়া যায় তবে জানিবে মাটাম ঠিক আছে, নতুবা নহে।

৩। স্বীকৃত কথা।

স্বীকার করা যাইতে পারে যে

১। এক বিন্দু হইতে আর এক বিন্দু পর্য্যন্ত ঋজু রেখা টানা যায়।

২। যে কোন ঋজুরেখা উভয় দিকে যথেচ্ছা বর্দ্ধিত করা যায়।

৩। যে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র ও যে কোন ঋজুরেখাকে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

৪। সসীম ঋজুরেখাকে সমান দ্বিখণ্ড করা যায়।

৫। যে কোন কোণকে সমান দ্বিখণ্ড করা যায়।

৬। যে কোন ঋজুরেখার উপর তৎস্থিত বা তাহার বাহিরে স্থিত যে কোন বিন্দু হইতে একটি লম্ব টানা যায়।

৭। যে কোন ঋজুরেখার বাহিরে স্থিত কোন বিন্দু দিয়া সেই রেখার সমান্তর ঋজুরেখা টানা যায়।

৮। যে কোন ঋজুরেখাস্থিত বিন্দু হইতে আর একটি ঋজুরেখা এমন ভাবে টানা যায় যে উভয় রেখার মধ্যে একটি নির্দ্দিষ্ট কোণ থাকিবে।

টিপ্পনী (১)। প্রথম ও দ্বিতীয় স্বীকৃত কথা ঋজুরেখা টানিবার নিমিত্ত রুল্ ব্যবহার, ও তৃতীয় স্বীকৃত কথা বৃত্ত আঁকিবার নিমিত্ত কম্পাস ব্যবহার, আবশ্যক বলিয়া মানিয়া লইতেছে। এবং তাহা না মানিয়া লইলে জ্যামিতির কোন সম্পাদ্য অঙ্কন কার্য্য সম্পন্ন হয় না।

চতুর্থ হইতে অষ্টম স্বীকৃত কথায় যে অঙ্কন কার্য্যগুলির সম্পাদন সাধ্য বলিয়া মানিয়া লওয়া হইতেছে, তাহা কেবল কতকগুলি উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করণার্থে মানিয়া লওয়া হইয়াছে। এবং পরে (এই অধ্যায়ের সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ২ হইতে ৬ দ্রষ্টব্য) তত্তৎ অঙ্কন কার্য্য কেবল প্রথম, দ্বিতীয়, ও তৃতীয় স্বীকৃত কথার সাহায্যে, অর্থাৎ কেবল রুল ও কম্পাসের সাহায্যে, এবং অন্য কোন যন্ত্রের সাহায্য না লইয়া, কিরূপে সম্পাদিত হইতে পারে তাহা দর্শিত হইয়াছে।

(২)। এ স্থলে ইহাও বলা যাইতে পারে যে, চতুর্থ হইতে অষ্টম স্বীকৃত কথায় যে অঙ্কন কার্য্যগুলি সাধ্য বলিয়া মানিয়া লওয়া হইয়াছে, তাহা এত সহজে সাধ্য যে তাহা মানিয়া লওয়াতে কোন বিশেষ আপত্তি থাকিতে পারে না।

চতুর্থ হইতে অষ্টম স্বীকৃত কথায় যে যে অঙ্কনগুলি সাধ্য বলিয়া মানিয়া লওয়া হইয়াছে, তন্মধ্যে প্রথম তিনটি, বিনা যন্ত্রের সাহায্যেও, নিম্নলিখিতরূপে সহজে সম্পাদিত হইতে পারে।

কোন নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখা সমদ্বিখণ্ড করিতে হইলে, মনে কর যে সমতল পৃষ্ঠে তাহা অঙ্কিত সেই পৃষ্ঠ সকল দিকে সম্পূর্ণ নতিশীল, ও স্বচ্ছ, অর্থাৎ মনে কর তাহা এক খণ্ড পাতলা স্বচ্ছ কাগজ। সেই কাগজখানি এরূপে ভাঁজ কর যে তদুপরি অঙ্কিত সেই ঋজুরেখার এক অংশ অপর অংশের উপর পড়ে, এবং তাহার একদিকের শেষ বিন্দু অপর দিকের শেষ বিন্দুর উপর পড়ে। তাহা হইলে রেখাব যে বিন্দু সেই ভাঁজের উপর পড়িল সেই বিন্দু অবশ্যই রেখার মধ্যস্থান হইবে।

কোন নির্দ্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ড কবিতে হইলে, মনে কব তাহা উক্ত রূপ কাগজে অঙ্কিত আছে। এবং সেই কাগজখানি এরূপে ভাঁজ কব যে ঐ কোণের এক বাহু অপর বাহুর উপব পড়ে। তাহা হইলে ভাঁজের ঋজুরেখা অবশ্যই ঐ কোণকে সমদ্বিখণ্ডে বিভক্ত করিবে।

কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখাব উপর লম্ব টানিতে হইলে, মনে কর ঐ বেখা ও বিন্দু উক্ত প্রকাব কাগজে অঙ্কিত, এবং সেই কাগজখানি এরূপে ভাঁজ কব যে ভাঁজের বেখা সেই বিন্দু দিয়া যায়, এবং নির্দ্দিষ্ট বেখার এক অংশ তাহার অপর অংশের উপর পড়ে। তাহা হইলে ভাঁজেব ঋজুরেখা ও নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখাতে যে দুটি সন্নিহিত কোণ হইল তাহা স্পষ্ট দেখা যাইতেছে সমান, সুতরাং সেই ভাঁজের রেখা নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে নির্দ্দিষ্ট বেখাব উপর লম্ব।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা।

উপক্রমণিকা। ১। নিম্নের সাঙ্কেতিক চিহ্নগুলি এই পুস্তকে ব্যবহৃত হইবে।

বিন্দু	স্থলে	বি:
ঋজুরেখা	...	| বা ঋঃরেঃ
কোণ		∠
সমান্তর		‖
লম্ব		⊥
ত্রিভুজ বা ত্রিকোণ	..	△
সামান্তরিক	.	▱
আয়ত	...	▭
সমচতুর্ভুজ বা বর্গক্ষেত্র		□ বা বঃক্ষেঃ
বৃত্ত		⊙
পরিধি		○
কারণ বা যেহেতুক		∵
অতএব		∴
সমান		=
বড়		>
ছোট		<
কখ'র উপর বর্গক্ষেত্র		**কখ**²
কখ ও **গঘ** লইয়া আয়ত		**কখ গঘ**

কিন্তু পুস্তক পাঠ করিবাব কি কোন প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করিবার সময় সাঙ্কেতিক চিহ্নগুলি যে যে শব্দেব পরিবর্ত্তে ব্যবহৃত হইয়াছে সেই সেই শব্দ উচ্চারণ করা আবশ্যক।

কএকটি চিহ্ন পাঠকালে তাহার নামের সহিত আর দুই একটি শব্দ যোগ করিতে হইবে, যথা—

"কখ ॥ গঘ" পাঠ কবিতে হইবে 'কখ সমান্তর গঘ'ব সহিত"

"কখ⊥গঘ"	"কখ লম্ব গঘ'র উপর"
"কখ=গঘ"	"কখ সমান গঘ'র সহিত"
"কখ>গঘ"	"কখ বড় গঘ'র অপেক্ষা"
"কখ<গঘ"	"কখ ছোট গঘ'র অপেক্ষা"

২। প্রতিজ্ঞাগুলি পাঠ করিবার সময় প্রত্যেক **অঙ্কন কার্য্যের প্রয়োজন** ও প্রত্যোক **যুক্তিপ্রয়োগের হেতু** বিদ্যার্থী নিজে বুঝিবাব নিমিত্ত যথাসাধ্য চেষ্টা কবিবেন।

৩। স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্ব ও পূর্ব্বে প্রমাণীকৃত প্রতিজ্ঞার সত্যতা ভিন্ন অন্য কোন কথাব সত্যতা বিদ্যার্থী মানিয়া লইবেন না।

৪। চিত্রগুলি শুদ্ধরূপে অঙ্কিত করণার্থে বিদ্যার্থী বিশেষ যত্ন করিবেন। শুদ্ধরূপে অঙ্কিত চিত্র অনেক স্থলে প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করণের সাহায্য করে।

শুদ্ধরূপে চিত্রাঙ্কনের নিমিত্ত নিম্নলিখিত যন্ত্র কএকটি ব্যবহাব করা যায়।

(১) স্কেল। (ঋজুরেখা টানিবাব ও মাপিবার নিমিত্ত)

(২) কম্পাস। (বৃত্ত বা বৃত্তাংশ আঁকিবাব নিমিত্ত)

(৩) প্রোট্রাকটব বা চক্র। (কোণ মাপিবাব নিমিত্ত)

(৪) সেট স্কোয়েয়ার বা মাটাম। (সমকোণ আঁকিবাব নিমিত্ত)

কোণ মাপিবার নিমিত্ত সমকোণ বা বৃত্তের চতুর্থাংশকে ৯০ ভাগে ভাগ করা যায়, ও তাহাব প্রত্যেক ভাগকে এক ডিগ্রি ১° বলে। ১° কে আবাব ৬০ ভাগে ভাগ করা হয় ও প্রত্যেক ভাগকে এক মিনিট $১'$ বলে। এবং $১'$ কে ৬০ ভাগে ভাগ করা হয়, ও প্রত্যেক ভাগকে এক সেকেণ্ড $১''$ বলে।

অতএব $\frac{১}{২}$ সমকোণ $= \frac{১}{২} \times ৯০^{\circ} = ৪৫^{\circ}$,

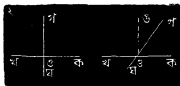
$\frac{১}{৩}$ $= \frac{১}{৩} \times ৯০^{\circ} = ৩০^{\circ}$,

$\frac{১}{৪}$ $= \frac{১}{৪} \times ৯০^{\circ} = ২২^{\circ}\ ৩০'$।

৫। মনে রাখিতে হইবে, এই পুস্তকেব ১ম, ২য় ও ৩য় অধ্যায়ে যে সকল বিন্দু, রেখা, কোণ ও ক্ষেত্রের উল্লেখ আছে তাহা এক সমতল স্থিত।

১। সম্পাতী ঋজুরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

যদি এক ঋজুরেখার কোন এক বিন্দুতে দুই বিপরীত দিক হইতে দুটি ঋজুরেখা আসিয়া মিলিত হয়, এবং তাহারা এক ঋজু রেখায় থাকে, তাহা হইলে তাহারা মধ্য রেখার সহিত যে দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণ দ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

১ম চিত্র ২য় চিত্র।

মনে কর ঋঃ রেঃ **ওক, ওখ**

ঋ রেঃ **গঘ**'র বিপরীত দিক হইতে আসিয়া **ও** বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,
এবং একই ঋঃ বেঃ তে আছে।

তাহা হইলে ∠**কওগ** এবং ∠ **গওখ** একত্র = ২ সমকোণ।

যদি ∠**কওগ** = ∠**গওখ** (যথা ১ম চিত্রে)

তাহা হইলে তাহাবা প্রত্যেকেই একটি সমকোণ (১০ পরিভাষা),

∴ ∠**কওগ** + ∠**গওখ** = ২ সম ∠।

যদি ∠**কওগ** এবং ∠**গওখ** সমান না হয় (যথা ২য় চিত্রে)

মনে কব **ওঙ⊥কখ**।

তাহা হইলে ∠**কওগ** + ∠**গওখ** = ∠**কওগ** + ∠**গওঙ** + ∠**ঙওখ**,

এবং ∠**কওঙ** + ∠**ঙওখ** = ∠**কওগ** + ∠**গওঙ** + ∠**ঙওখ**,

∴ ∠**কওগ** + ∠**গওখ** = ∠**কওঙ** + ∠**ঙওখ** (১ স্বতঃসিদ্ধ)

= ২ সম ∠।

অনুমান (১)। উপরের প্রতিজ্ঞা হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, দুইটি সম্পাতী ঋজুরেখাতে যে চারিটি কোণ হয় তাহারা একত্র চারিটি সমকোণেব সমান।

অনুমান (২)। অনেকগুলি ঋজুরেখা একবিন্দুতে সংলগ্ন হইলে তাহাদের মধ্যে পর পব যে কোণগুলি থাকে তাহাদের সমষ্টি চাবি সমকোণের সমান।

টিপ্পনী। **ক ও গ** এবং **গ ও থ** কোণদ্বয়কে পবস্পরের **পরিপূরক** বলে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২।

যদি এক ঋজুরেখায় কোন একবিন্দুতে দুই বিপরীত দিক হইতে দুটি ঋজুরেখা আসিয়া মিলিত হয়, এবং মধ্যরেখার সহিত তাহারা যে দুটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়, তাহা হইলে ঐ দুইটি ঋজুরেখা এক ঋজুরেখায় থাকিবে।

মনে কর ঋঃ রেঃ **ওক**, **ওখ** ঋঃ বেঃ **ওগ**'র বিপরীত দুই দিক হইতে আসিয়া **ও** তে মিলিয়াছে,

এবং ∠ **কওগ** + ∠**গওখ** = ২ সম ∠।

তাহা হইলে **ওক** এবং **ওখ** একই ঋঃ রেঃ।

কারণ, যদি তাহা না হয়,

মনে কর **কও** বর্দ্ধিত করিলে ঋঃ রে**কঃ ওঘ** হয়।

তাহা হইলে ∠ **কওগ** + ∠**গওঘ** = ২ সম ∠ (উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১)।

কিন্তু ∠ **কওগ** + ∠**গওখ** = ২ সম ∠ (কল্পনানুসারে)।

∴ এই সমান সমষ্টিদ্বয় হইতে ∠**কওগ** বাদ দিলে,

∠**কওঘ** = ∠**কওখ** (স্বতঃসিদ্ধ ৩),

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর ∠, বৃহত্তর ∠ এর সমান,

কিন্তু তাহা হইতে পারে না।

অতএব **ওঘ** অবশ্যই **ওখ**'র সহিত মিলিত হইবে,

অর্থাৎ **ওক** এবং **ওখ** অবশ্যই একই ঋঃ রেঃ হইবে।

টিপ্পনী (১)। এই প্রতিজ্ঞা ও ইহার পূর্ব্ববর্ত্তী প্রতিজ্ঞা পরস্পরের পরিবৃত্ত বা বিলোম। কারণ, একের কল্পিত তত্ত্ব বা হেতু (রেখাদ্বয় একই ঋজু রেখায় থাকা) অপরের অনুমিত তত্ত্ব বা সিদ্ধান্ত, এবং একের অনুমিত তত্ত্ব বা সিদ্ধান্ত (কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হওয়া) অপরের কল্পিত তত্ত্ব বা হেতু।

(২)। যে কোন বিন্দুদ্বয় এক ঋজুরেখা দ্বারা সংযুক্ত হইতে, অর্থাৎ এক ঋজুরেখায় থাকিতে, পারে।

কিন্তু যে কোন বিন্দুত্রয় এক ঋজুরেখাতে থাকিতে পারে নাও পারে। উপরের বিন্দুত্রয়, **ক**, **ও**, এবং **খ** এরূপে সংস্থিত যে মধ্যবিন্দু **ও** দিয়া যে কোন ঋজুরেখা **ওগ** টানিলে,

∠**কওগ** + ∠ **গওখ** = ২ সম ∠,

এবং সেই জন্যই **ক**, **ও**, এবং **খ**, একই ঋজুরেখায় আছে।

যদি তিন বা ততোধিক বিন্দু একই ঋজুরেখায় থাকে, তাহাদিগকে **একরেখাস্থ** বিন্দু বলা যায়।

এক সমতলস্থিত যে কোন ঋজুরেখাদ্বয় সমান্তর না হইলে অবশ্যই একবিন্দুতে মিলিত হইবে। কিন্তু যে কোন ঋজুরেখাত্রয় এক বিন্দুতে মিলিতে পারে নাও পারে।

যদি তিন বা ততোধিক ঋজুরেখা একই বিন্দুতে মিলে তাহাদিগকে **একবিন্দু-মুখী** রেখা বলা যায়।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩।

যদি দুই ঋজুরেখা পরস্পরকে ছেদ করে, তাহা হইলে বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

মনে কর ঋঃ রেঃ **কওখ** এবং **গওঘ**

ও তে পরস্পরকে ছেদ করিতেছে।

তাহা হইলে ∠ **কওগ** = ∠ **খওঘ**, ∠ **কওঘ** = ∠ **খওগ**।

কারণ, ∠ **কওগ** + ∠ **গওখ** = ২ সম ∠ (উঃ প্রঃ ১),

এবং ∠ **খওঘ** + ∠ **গওখ** = ২ সম ∠ (ঐ),

∴ ∠ **কওগ** + ∠ **গওখ** = ∠ **খওঘ** + ∠ **গওখ**।

এবং এই সমান সমষ্টিদ্বয় হইতে ∠ **গওখ** বাদ দিলে,

∠ **কওগ** = ∠ **খওঘ**।

ঐরূপে দেখা যাইবে ∠ **কওঘ** = ∠ **খওগ**।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৪।

যদি একটি ঋজুরেখা দুইটি সম্পাতী ঋজুরেখার উপর পতিত হয়, তাহা হইলে একান্তর কোণদ্বয় অসমান হইবে, এবং যে দিকে সম্পাতী রেখাদ্বয় মিলিত হইয়াছে সেই দিকের কোণ অপর দিকের কোণ অপেক্ষা ছোট হইবে।

মনে কর ঋঃ রেঃ **গঙ**
সম্পাতী ঋঃ রেঃ **ওক** এবং **ওখ**'র উপর পতিত হইয়াছে।
তাহা হইলে ∠ **ওঘঙ** < ∠ **ঘঙখ**, এবং ∠ **ওঙঘ** < ∠ **ঙঘক**।

মনে কর **ঘঙ** কে **জ** বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ড করা হইয়াছে,
এবং **জহ** = **ওজ** করিয়া টানা হইয়াছে,
আর **হঙ** যোগ করা হইয়াছে।

△ **জঙহ** কে উল্‌টাইয়া △ **জঘও**'র উপরে এরূপে রাখ যে,
একের **জ** বিন্দু অপরের **জ** বিন্দুর উপর পড়ে,
এবং একের বাহু **জঙ** অপরের বাহু **জঘ**'র উপর পড়ে,
তাহা হইলে বিন্দু **ঙ** বিন্দু **ঘ**'র উপর পড়িবে,
কারণ **জঙ** = **জঘ**।

এবং ঋঃ রেঃ **জও** ঋঃ রেঃ **জঘ**'র উপর পড়াতে,
ঋঃ রেঃ **জহ** ঋঃ রেঃ **জও**'র উপর পড়িবে,
কারণ ∠**ঙজহ** = ∠**ঘজও**, (উঃ প্রঃ ৩)।

এবং বিন্দু **হ** বিন্দু **ঙ**'র উপর পড়িবে,

কারণ **জহ** = **জঙ**।

আর **ঙ** এবং **হ** বিন্দুদ্বয় **ঘ** এবং **ঙ**'র উপর পড়াতে,

ঋঃ রেঃ **ঙহ** ঋঃ রেঃ **ঘঙ**'র উপর পড়িবে (স্বতঃসিদ্ধ ১০)।

অতএব ∠ **জঙহ** ∠ **জঘঙ**'র সহিত মিলিবে।

∴ ∠ **জঘঙ** = ∠ **জঙহ** (স্বতঃসিদ্ধ ৯)।

কিন্তু ∠ **জঙহ** < ∠ **ঘঙখ**,

∴ ∠ **জঘঙ** অর্থাৎ ∠ **ঙঘঙ** < ∠ **ঘঙখ**।

সেইরূপে দেখা যাইবে ∠ **ঙঙঘ** < ∠ **ঙঘক**।

২। সমান্তর ঋজুরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩।

১। যদি একটি ঋজুরেখা অপর দুইটি ঋজুরেখার উপর পতিত হয়, এবং একান্তর কোণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে ঐ দুইটি রেখা সমান্তর হইবে।

২। পরিবৃত্তক্রমে, যদি একটি ঋজুরেখা দুইটি সমান্তর ঋজুরেখার উপর পতিত হয়, তাহা হইলে একান্তর কোণদ্বয় সমান হইবে।

১। মনে কর ঋঃ রেঃ **কখ** ঋঃ রেঃ **ঙচ** ও **জহ**'র উপর পতিত,
এবং ∠ **ঙগঘ** = ∠ **গঘহ**।

তাহা হইলে **ঙচ** ॥ **জহ**।

কারণ, যদি না হয়, মনে কর **ঙচ** এবং **জহ, ঝ** তে মিলিত।

তাহা হইলে ∠ **গঘহ** < ∠ **ঙগঘ** (উঃ প্রঃ ৪),
কিন্তু তাহা অসম্ভব,
কারণ　∠ **গঘহ** = ∠ **ঙগঘ** (কল্পনানুসারে)।

অতএব **ঙচ** এবং **জহ, ঝ** তে মিলিত হইতে পারে না।
ঐরূপে দেখা যাইবে তাহারা বিপরীত দিকেও
মিলিত হইতে পারে না।
অতএব তাহারা সমান্তর।

২। মনে কর, ∠খঘহ = ∠খগচ,
অথবা ∠খগচ + ∠কঘহ = ২সম ∠।
তাহা হইলে ঙচ ॥ জহ।
কারণ, ∵ ∠খগচ = ∠খঘহ = ∠জঘগ (উঃ প্রঃ ৩),
∴ ঙচ ॥ জহ (উঃ প্রঃ ৫)।
আবার, ∵ ∠খগচ + ∠কঘহ = ২ সম ∠
= ∠কঘজ + ∠কঘহ (উঃ প্রঃ ১),
∴ উভয় দিক হইতে ∠কঘহ বাদ দিলে,
∠ খগচ = ∠কঘজ,
এবং ∴ ঙচ ॥ জহ (উঃ প্রঃ ৫)।

টিপ্পনী। একটি ঋজু রেখা অপর দুইটির উপর পতিত হইলে, যদি সেই দুইটি সমান্তর হয়, তাহা হইলে,

(১) একান্তর কোণ গুলি সমান হইবে,

(২) বাহিরের কোণ অন্তরের কোণ সমান হইবে, এবং

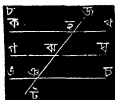
(৩) অন্তরের কোণদ্বয় পরস্পরের পরিপূরক হইবে।

আবার পরিবৃত্তক্রমে, যদি উপরের লিখিত তিনটি কথার কোন একটি সত্য হয়, তাহা হইলে রেখা দ্বয় সমান্তর হইবে।

প্রথম তত্ত্বটি স্বাধীন ভাবে সপ্রমাণ করা হইয়াছে, এবং অপর দুইটি প্রথমটির সাহায্যে প্রতিপন্ন করা হইয়াছে।

মনে রাখিতে হইবে যে, বাহিরের কোণ দুই যুগ্ম, অর্থাৎ চারিটি, ও অন্তরের কোণও দুই যুগ্ম, এবং প্রত্যেক যুগ্মের কোণদ্বয় পরস্পরের পরিপূরক। আর অন্তরের কোণ চতুষ্টয়কে একান্তর করিয়া লইলে একান্তর কোণও দুই যুগ্ম।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৭।

যদি দুই ঋজুরেখার প্রত্যেকটি একই ঋজুরেখার সমান্তর হয়, তাহা হইলে তাহারা পরস্পরের সমান্তর হইবে।

মনে কর ঋঃ রেঃ **কখ** ও **গঘ** উভয়ই ॥ **ঙচ**।

তাহা হইলে **কখ** ॥ **গঘ**।

কারণ, মনে কর একটি ঋঃ রেঃ **জহঝঞট** ঐ তিন ঋঃ রেঃ' ব উপর পতিত।

তাহা হইলে, ∵ **কখ** ॥ **ঙচ**,

∴ ∠ **কহট** = ∠ **জঞচ** (উঃ প্রঃ ৫)।

আবার, ∵ **গঘ** ॥ **ঙচ**,

∴ ∠ **জঝঘ** = ∠ **জঞচ** (উঃ প্রঃ ৬)।

অতএব ∠ **কহট** = ∠ **জঝঘ** (স্বতঃসিদ্ধ ১),

এবং ∴ **কখ** ॥ **গঘ** (উঃ প্রঃ ৫)।

অনুমান। যদি দুটি সম্পাতী ঋজুরেখা অপর দুটি সম্পাতী ঋজুরেখার সহিত সমান্তর হয়, তাহা হইলে প্রথমোক্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ দ্বিতীয়োক্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান হইবে।

উপরের চিত্রে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে,

∠গ=খগ ও ক´গ´এর অন্তর্গত ∠

= ∠গ´ (উঃ প্রঃ ৬)।

৩। ত্রিভুজের কোণের ও বাহুর পরস্পর সম্বন্ধ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৮।

যদি তিনটি ঋজুরেখার পরস্পর ছেদে একটি ত্রিকোণ হয়, তাহা হইলে অন্তরের কোণত্রয় একত্র দুই সমকোণের সমান হইবে।

মনে কর তিনটি ঋঃ রেঃ **কখ**, **খগ**, **গক**'র ছেদে △ **কখগ** হইয়াছে। তাহা হইলে, ∠**গকখ**+∠**কখগ**+∠**খগক**=২ সম ∠।

খগকে ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর, এবং মনে কর **গঙ** ॥ **কখ** টানা হইয়াছে।

তাহা হইলে, ∵ **গঙ** ॥ **কখ**,
∴ ∠ **গকখ** = ∠**কগঙ** (উঃ প্রঃ ৫),
এবং ∠ **কখগ** ∠**ঙগঘ** (উঃ প্রঃ ৬)।

∴ ∠**গকখ**+∠**কখগ**+∠**খগক**=∠**কগঙ**+∠**ঙগঘ**+∠**খগক**
=∠**কগঘ**+∠**খগক**
=২ সম ∠উঃ প্রঃ ১)।

অনুমান (১)। ত্রিকোণের কোন দুই কোণ একত্রে দুই সমকোণের ন্যূন।

টিপ্পনী (১)। ত্রিকোণের একটি কোণ যদি স্থূল কোণ হয়, তবে অপর দুইটি কোণই সূক্ষ্ম কোণ হইবে।

অনুমান (২)। ত্রিকোণেব কোন এক বাহু বৰ্দ্ধিত কবিলে, বাহিরের কোণ অন্তরের দূরস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টিব সমান, এবং তাহাদের যে কোন একটি অপেক্ষা বড় হইবে।

অনুমান (৩)। যে কোন ঋজুবৈখিক ক্ষেত্রের সমস্ত অন্তবস্থ কোণের সমষ্টি চারিটি সমকোণেব সহিত যোগ কবিলে, যোগফল ক্ষেত্রেব বাহুর দ্বিগুণ সংখ্যক সমকোণেব সমান হইবে।

মনে কর একটি ন সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট ঋজুবৈখিক ক্ষেত্র লওয়া গেল। তাহা হইলে তাহার সমস্ত অন্তরস্থ কোণ + ৪ সম ∠ = ২ ন সম ∠।

ক্ষেত্রেব মধ্যে যে কোন বিন্দু ও লইয়া তাহা ক্ষেত্রেব প্রত্যেক কোণেব সহিত যোগ কর।

তাহা হইলে ক্ষেত্রটি ন সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে, এবং ঐ
ন △এর ∠ সমূহ = ন × ২ সম ∠।
কিন্তু ঐ ন △ এব ∠ সমূহ = ক্ষেত্রেব সমস্ত অন্তবস্থ ∠
\+ ও স্থিত সমস্ত ∠।
এবং ও স্থিত সমস্ত ∠ = ৪ সম ∠ (উঃ প্রঃ ১, অনুমান ২)।
∴ ক্ষেত্রের সমস্ত অন্তরস্থ ∠ + ৪ সম ∠ = ন × ২ সম ∠।

অনুমান (৪)। যদি কোন ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের সকল অন্তরস্থ কোণই দুই সমকোণের ন্যূন হয়, এবং তাহার বাহুগুলি যথাক্রমে একদিকে বৰ্দ্ধিত করা যায়, তাহা হইলে যে বাহিরের কোণগুলি উৎপন্ন হইল, তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান হইবে।

মনে কর ক্ষেত্রটির ন সংখ্যক বাহু আছে। তাহা হইলে,
সমস্ত অন্তরস্থ ∠ + সমস্ত বাহিরের ∠ = ন × ২ সম ∠।
কিন্তু সমস্ত অন্তরস্থ ∠ + ৪ সম ∠ = ন × ২ সম ∠।
∴ সমস্ত বাহিরের ∠ = ৪ সম ।

টিপ্পনী (২)। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ৮ ও ৬ হইতে দেখা যায় যে, যদি **একটী** ঋজুরেখা অপর **দুইটি** ঋজুরেখার উপর পতিত হয়, তাহা হইলে তাহার কোন একদিকের অন্তরস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান, ন্যূন, বা অধিক, হইবে, যদি সেই রেখাদ্বয় সমান্তর, অথবা সেই দিকে মিলনমুখী, বা বিস্তারমুখী, হয়, এবং সেই ন্যূনতা বা আধিক্যের পরিমাণ উক্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সহিত সমান হইবে। যদি সমান্তর রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ শূন্য মনে করা যায়, তাহা হইলে ঐ কথাগুলি সংক্ষেপে এইরূপে বলা যাইতে পারে—যদি এক ঋজুরেখা অপর ঋজুরেখাদ্বয়ের উপর পতিত হয়, তাহা হইলে তাহার একদিকের অন্তরস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি ও দুই সমকোণের প্রভেদ সেই রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সহিত সমান।

অনুমান (৫)। উপরের ৩য় অনুমানের সাহায্যে, **সমবাহু সমানকোণী** যে কোন ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের কোণের পরিমাণ নিরূপণ করিতে পারা যায়।

মনে কর ক্ষেত্রের বাহুর সংখ্যা = ন, তাহা হইলে,

তাহার অন্তরস্থ ∠ $= \frac{১}{ন} \times (২ন - ৪)$সম ∠

$= \left(২ - \frac{৪}{ন}\right)$সম ∠

　　　$= \frac{২}{৩}$সম ∠,　　　যদি ন = ৩,
অথবা　$=$ ১সম ∠,　　　যদি ন = ৪,
অথবা　$= \frac{৬}{৫}$সম ∠,　　　যদি ন = ৫,
অথবা　$= \frac{৪}{৩}$সম ∠,　　　যদি ন = ৬,
অথবা　$= \frac{১০}{৭}$সম ∠,　　　যদি ন = ৭,
অথবা　$= \frac{৩}{২}$সম ∠,　　　যদি ন = ৮,
　　ইত্যাদি,　　　　ইত্যাদি।

ইহা হইতে দেখা যাইতেছে,

∵ যে কোন বিন্দুর চারিদিকের ∠ সমূহ = ৪সম ∠,

∴ **সমবাহু ত্রিভুজ**　　　(সংখ্যায় ৬টি),
　সম চতুর্ভুজ　　　(‥ ৪টি),
　সমবাহু সমানকোণী ষড়্‌ভুজ (　৩টি),

ইহারাই কেবল মাত্র সমবাহু সমানকোণী ক্ষেত্র **যদ্দ্বারা বিন্দুর চতুর্দ্দিকের স্থানসমস্ত পূর্ণ হইতে পারে।**

কারণ ৫ বাহু বিশিষ্ট ক্ষেত্রের ৩টিতে স্থান পূর্ণ হইবে না, এবং
৪ টিতে স্থানের অতিরিক্ত হইবে,
আর ৭ বা ততোধিক ২ টিতে স্থান পূর্ণ হইবে না, এবং
৩ টিতে স্থানের অতিরিক্ত হইবে।

টিপ্পনী (৩)। মধুমক্ষিকারা মধুচক্রের ঘরগুলি সমবাহু সমানকোণী ষট্‌কোণ আকারে নির্ম্মাণ করে, সুতরাং প্রত্যেক সংযোগ স্থলের চতুর্দ্দিকে তিনটি করিয়া ঘর সমস্ত স্থান পূর্ণ করে, কোন স্থান বৃথা পড়িয়া থাকে না। এবং তাহাদের প্রায়গোল আকারের ডিম্ব রাখিবার পক্ষে ষট্‌কোণ ঘরই ত্রিকোণ বা চতুষ্কোণ ঘর অপেক্ষা অধিক সুবিধাজনক, কারণ তাহাতে অধিক স্থান বৃথা পড়িয়া থাকে না।

ক্ষুদ্র মধুমক্ষিকার চক্ররচনানৈপুণ্য কি চমৎকার।

অষ্টম উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার আর একটি প্রমাণ

এক্ষণে দেওয়া যাইবে।

এই প্রমাণ অধ্যাপক প্রেফেয়ার দিয়াছেন।

মনে কর **কখগ** একটি △।

গক, কখ, ও **খগ** কে ক্রমান্বয়ে **ঘ,ঙ,চ** পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

ক কে কেন্দ্র করিয়া **কঘ** কে ∠ **ঘকখ** পরিমাণে **ঘুরাও,**
তাহা হইলে **কঘ, কখ**'র সহিত মিলিবে।

তদনন্তর **কঘ** কে **কখ**'র উপর **চালিত** কর
যতক্ষণ না **ক** বিন্দু **খ**'র উপর পড়ে।

তাহার পর **খ** কে কেন্দ্র করিয়া **কঘ** কে ∠ **ঙখগ** পরিমাণে **ঘুরাও,**
তাহা হইলে **কঘ, খগ**'র সহিত মিলিবে।

তদনন্তর **কঘ** কে **খগ**'র উপর **চালিত** কর
যতক্ষণ না **ক** বিন্দু **গ**'র উপর পড়ে।

তাহার পর **গ** কে কেন্দ্র করিয়া **কঘ** কে ∠**চগক** পরিমাণে **ঘুরাও**,
তাহা হইলে **কঘ**, **গক**'র সহিত মিলিবে।

তদনন্তর **কঘ** কে **গক**'র উপরে **চালিত** কর
যতক্ষণ না **ক** বিন্দু পুনবায় **ক**'র উপরে পড়ে।
তাহা হইলেই **কঘ পুনরায় পূর্ব্বস্থানে আসিবে।**

অতএব দেখা যাইতেছে,

∠ **ঘকথ** + ∠ **ঙখগ** + ∠ **চগক** পরিমাণ **ঘূর্ণনে**,
এবং কিঞ্চিৎ **চালনে**,

কঘ পুনরায় পূর্ব্বস্থানে আসিয়াছে,
এবং ঋজুরেখার উপর চালনে তাহার ঘূর্ণনের হ্রাসবৃদ্ধি হয় নাই।

আর ইহাও স্পষ্ট দেখা যায় যে,

কোন ঋজুরেখাকে ঘূর্ণন দ্বারা পূর্ব্বস্থানে আনিতে হইলে,
ঘূর্ণনের পরিমাণ ৪ সমকোণ হইবে।

∴ ∠ **ঘকথ** + ∠**ঙখগ** + ∠**চগক** = ৪ সম ∠।

এবং ∠**ঘকথ** + ∠**ঙখগ** + ∠**চগক**
+ ∠**গকথ** + ∠ **কথগ** + ∠**খগক** = ৬ সম ∠।

∴ ∠**গকথ** + ∠**কথগ** + ∠**খগক** = ২ সম ∠।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৯।

১। যদি কোন ত্রিভুজের দুই বাহু সমান হয়, তাহা হইলে তাহাদের বিপরীত কোনদ্বয় সমান হইবে।

২। পরিবৃত্তক্রমে, যদি কোন ত্রিভুজের দুই কোণ সমান হয়, তাহা হইলে তাহাদের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান হইবে।

১। মনে কর △ কখগ'র বাহুদ্বয় কখ, কগ সমান।
তাহা হইলে ∠ কগখ = ∠ কখগ।

মনে কর ∠ খকগ, ঋঃ রেঃ কঘ দ্বারা সমদ্বিখণ্ড হইয়াছে,
এবং △ কখগ ঋঃ রেঃ কঘ অনুসারে ভাঁজ করা হইয়াছে।

তাহা হইলে, ∵ ∠ গকঘ = ∠ খকঘ,
∴ কগ, কখ'র উপর পড়িবে,
এবং, ∵ কগ = কখ, ∴ গ, খ'র উপর পড়িবে।
এবং, ∵ গঙঘ, খঙঘ'র সহ মিলিত,
∴ গঘ, খঘ'র উপর পড়িবে (স্বতঃসিদ্ধ ১০)।

সুতরাং ∠ কগঘ, ∠ কখঘ'র সহিত মিলিত হইবে,
এবং ∴ ∠ কগখ = ∠ কখগ (স্বতঃসিদ্ধ ৯)।

২। মনে কর △ কখগ'র ∠ কগখ = ∠ কখগ,
তাহা হইলে কখ = কগ।

কাবণ তাহা না হইলে কোন একটি বাহু > অপব বাহু।

মনে কব **কগ** > **কখ**,

এবং **কঙ** = **কখ**।

তাহা হইলে এই প্রতিজ্ঞার পূর্ব্বভাগ অনুসাবে,

∠ **কঙখ** = ∠ **কখঙ**।

কিন্তু　　∠ **কঙখ** > ∠ **কগখ** (উঃ প্রঃ ৮, অনুমান ২),

∴　　∠ **কখঙ** > ∠ **কগখ**।

এবং,　∵　　∠ **কখগ** > ∠ **কখঙ**,

∴　　∠ **কখগ** > ∠ **কগখ**।

কিন্তু তাহা অসম্ভব, কাবণ তাহা কল্পনার বিপবীত।

অতএব, **কখ** ও **কগ** অসমান নহে, অর্থাৎ তাহারা সমান।

অনুমান। ইহা হইতে দেখা যাইতেছে, প্রত্যেক সমবাহু ত্রিভুজ অবশ্যই সমানকোণী হইবে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১০।

১। যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহু আর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণ দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

২। পরিবৃত্তক্রমে, যদি কোন ত্রিভুজের এক কোণ আর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথম কোণের বিপরীত বাহু দ্বিতীয় কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

১। মনে কর △ কখগ'র বাহু কখ > বাহু কগ।

তাহা হইলে ∠ কগখ > ∠ কখগ।

মনে কর কঘ = কগ, এবং গ ও ঘ যোগ কর।

তাহা হইলে ∠ কগঘ = ∠ কঘগ (উঃ প্রঃ ৯)।

কিন্তু ∠ কগখ > ∠ কগঘ,

∴ ∠ কগখ > ∠ কঘগ।

আবার ∠ কঘগ > ∠ কখগ (উঃ প্রঃ ৮ অনুঃ ২),

∴ ∠ কগখ > ∠ কখগ।

২। মনে কর ∠কগখ > ∠ কখগ।

তাহা হইলে কখ > কগ।

কারণ তাহা না হইলে কখ = কগ অথবা < কগ।

কিন্তু **কখ** = **কগ** হইতে পারে না,
কারণ তাহা হইলে ∠ **কগখ** = ∠ **কখগ** হইত,
এবং **কখ** < **কগ** হইতে পারে না,
কারণ তাহা হইলে ∠ **কগখ** < ∠ **কখগ** হইত।
∴ **কখ** > **কগ**।

অনুমান। একটি বিন্দু হইতে একটি ঋজুরেখার উপর যত ঋজুরেখা টানা যাইতে পারে তন্মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

কারণ, যদি **গ** হইতে **কখ**'র উপর **গঘ** ⊥ এবং **গঙ** অন্য ঋঃ রেঃ টানা হয়,
তাহা হইলে,

∠ **গঘঙ** = সম ∠ এবং ∴ > ∠ **গঙঘ** (উঃ প্রঃ ৮, অনুঃ১),
∴ **গঙ** > **গঘ**।

টিপ্পনী। নবম ও দশম উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার কথা একত্র সংক্ষেপে এই—

ত্রিভুজের এক বাহু আর এক বাহুর বড়, বা সমান, বা ছোট হইলে, তদবিপরীত কোণ অপর বাহুর বিপরীত কোণের বড়, বা সমান, বা ছোট হইবে। এবং পরিবৃত্তক্রমে, ত্রিভুজের এক কোণ আর এক কোণের বড়, বা সমান, বা ছোট হইলে, তাহার বিপরীত বাহু অপর কোণের বিপরীত বাহুর বড়, বা সমান, বা ছোট হইবে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১১।

ত্রিভুজের যে কোন বাহুদ্বয়ের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড়।

মনে কর **কখগ** একটি △, এবং **কখ**, **কগ** তাহার দুই বাহু।

তাহা হইলে **কখ + কগ > খগ**।

খক কে **ঘ** পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর এবং মনে কর **কঘ = কগ**।

তাহা হইলে, ∵ **কঘ = কগ**, ∴ ∠**কগঘ** = ∠**কঘগ** (উঃ প্রঃ ৯)।

কিন্তু ∠**খগঘ** > ∠**কগঘ**, ∴ ∠**খগঘ** > ∠**কঘগ** অর্থাৎ ∠**খঘগ**,

এবং ∴ **খঘ** অর্থাৎ **কখ + কঘ > খগ** (উঃ প্রঃ ১০)।

কিন্তু **কঘ = কগ**,

∴ **কখ + কগ > খগ**।

অনুমান। যে কোন দুই বিন্দুর মধ্যে ঋজুরেখা যোজকই অন্য প্রকার যোজক অপেক্ষা ন্যূনতম।

ইহা স্পষ্ট প্রতীয়মান। প্রমাণের অপেক্ষা থাকিলে তাহা এইরূপে দর্শিত হইতে পারে।

মনে কর **ক**, **খ** দুই বিন্দু,

এবং ঋজু রেখা **কখ**, ও কুটিলরেখা **কগঘখ** বা **কগ´ঘ´খ** বিন্দুদ্বয়ের যোজক।

তাহা হইলে **কগ+গঘ > কঘ**, এবং **কঘ+ঘখ > কখ**,

∴ **কগ+ গঘ +ঘখ > কখ**।

সেইরূপে **কগ´+গ´ঘ´+ঘ´খ > কখ**।

এবং বাহিরের গোল রেখা স্পষ্টই দেখা যাইতেছে, কুটিল রেখা **কগ´ঘ´গ** অপেক্ষা বড়।

৪। সর্ব্বাংশে সমান ত্রিভুজ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১২।

যদি একটি ত্রিভুজের দুই বাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হয়, এবং সেই সেই বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয়ের তৃতীয় বাহুযুগল সমান হইবে, ত্রিভুজদ্বয় সমান হইবে, এবং তাহাদের অবশিষ্ট কোণগুলি, অর্থাৎ যে যে কোণ সমান সমান বাহুর সম্মুখীন তাহারা, পরস্পর সমান হইবে।

মনে কর **কখগ**, **ঘঙচ** দুটি ত্রিভুজ যাহাতে

কখ = **ঘঙ**, **কগ** = **ঘচ**, ও ∠**খকগ**=∠**ঙঘচ**।

তাহা হইলে **খগ** = **ঙচ**, △**কখগ**= △ **ঘঙচ**,

∠ **কখগ** = ∠**ঘঙচ**,∠**কগখ**= ∠ **ঘচঙ**।

কারণ, যদি ত্রিভুজ **কখগ** ত্রিভুজ **ঘঙচ**'র উপর এরূপে স্থাপিত হয় যে, **ক** বিন্দু **ঘ** বিন্দুর উপর ও ঋঃ রেঃ **কখ** ঋঃ রেঃ **ঘঙ**'র উপর পড়ে,

তাহা হইলে **খ**, **ঙ**'র উপর পড়িবে, ∵ **কখ** = **ঘঙ**,

এবং **কগ**, **ঘচ**'র উপর পড়িবে, ∵ ∠ **খকগ** = ∠ **ঙঘচ**,

ও **গ**, **চ**'র উপর পড়িবে, ∵ **কগ** = **ঘচ**।

এবং **খ** ও **গ**, **ঙ** ও **চ**'র উপর পড়ায়,

ঋঃ রেঃ **খগ** ঋঃ রে **ঙচ**'র উপর পড়িবে (স্বতঃসিদ্ধ ১০),

সুতরাং　　**খগ** = **ঙচ** (স্বতঃসিদ্ধ ৯)।

এবং　　△ **কখগ**, △ **ঘঙচ**'র উপর পড়িবে,

সুতরাং　　△ **কখগ** = △ **ঘঙচ**।

আর ∠ **কখগ** ও ∠ **কগখ**, যথাক্রমে ∠ **ঘঙচ** ও ∠ **ঘচঙ**'র উপর পড়িবে,

সুতরাং　　∠ **কখগ** = ∠ **ঘঙচ**,

ও　　∠ **কগখ** = ∠ **ঘচঙ**।

টিপ্পনী ১। দুই ক্ষেত্র সর্ব্বাংশে সমান হইলে তাহাদিগকে **সমকক্ষ** ক্ষেত্র বলা যায়।

২। "যে যে কোণ সমান সমান বাহুর সম্মুখীন তাহারা, পরস্পর সমান হইবে" এই কথার তাৎপর্য্য বিশেষ করিয়া বুঝা আবশ্যক।

কথাগুলির তাৎপর্য্য এই যে, ∠ **কখগ** = ∠ **ঘঙচ**,

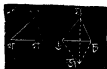
এবং ∠ **কগখ** = ∠ **ঘচঙ**, কিন্তু ∠ **কখগ**, ∠ **ঘচঙ**'র সমান হইবার কোন কারণ নাই।

৩। প্রমাণ করণ স্থলে বলা হইয়াছে

"**কগ**, **ঘচ**'র উপর পড়িবে, ∴ ∠ **খকগ** = ∠ **ঙঘচ**"।

এই কথার তাৎপর্য্য এই যে দুটি সমান কোণের মধ্যে একটি কোণের একবাহু যদি অপর কোণের একবাহুর সহিত মিলিত হয়, তবে তাহাদের অপর বাহুদ্বয় অবশ্যই মিলিত হইবে, কেন না, প্রথম কোণটি দ্বিতীয়টি অপেক্ষা বড় না হইলে তাহার অপর বাহু বাহিরে পড়িবে না, এবং সেই কোণ ছোট না হইলে তাহার অপর বাহু ভিতরে পড়িবে না।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৩।

যদি একটি ত্রিভুজের দুই বাহু আর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হয়, এবং তাহাদের তৃতীয় বাহুদ্বয়ও সমান হয়, তাহা হইলে একের প্রথমোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ অপর ত্রিভুজের তৎসমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান হইবে, এবং ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বাংশে সমান হইবে।

মনে কর **কখগ** ও **ঘঙচ** দুই ত্রিভুজ যাহাতে

কখ=ঘঙ, কগ=ঘচ, এবং **খগ=ঙচ**।

তাহা হইলে ∠**কখগ**=∠**ঙঘচ,**

এবং △ দ্বয় সর্ব্বাংশে সমান।

কারণ, △ **কখগ** যদি △ **ঘঙচ**'র উপর এরূপে স্থাপিত হয় যে,

খ, ঙ'র উপর ও **খগ**, **ঙচ**'র উপর পড়ে,

কিন্তু △ **কখগ**, △ **ঘঙচ**'র বিপরীত দিকে পড়ে,

তাহা হইলে **গ**, **চ**'র উপব পড়িবে, ∵ **খগ=ঙচ**।

মনে কর **কখ** ও **কগ**, **জঙ** ও **জচ** এইরূপে পড়িল।

ঘ, ও **জ** যোগ কর।

তাহা হইলে ∵ **ঘঙ=কখ=জঙ,**

∴ ∠**ঙজঘ**=∠**ঙঘজ** (উঃ প্রঃ ৯)।

এবং ∵ **ঘচ = কগ = জচ,**

∴ ∠**চজঘ** = ∠**চঘজ** (উঃপ্রঃ ৯)।

∴ যোগ করিলে ∠**ঙঘচ** = ∠**ঙজচ** = ∠**খকগ**।

এবং △ **কখগ** ও △ **ঘঙচ** সর্ব্বাংশে সমান (উঃপ্রঃ ১২)।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৪।

যদি একটি ত্রিভুজের দুই কোণ অপর একটি ত্রিভুজের দুই কোণের সহিত যথাক্রমে সমান হয়, এবং একের সমান সমান কোণের সন্নিহিত বা সম্মুখীন একটি বাহু অপরের তদ্রূপ বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বাংশে সমান হইবে।

মনে কর **কখগ**, **ঘঙচ** দুটি ত্রিভুজ যাহাতে

∠ **কখগ** = ∠ **ঘঙচ**, ও ∠ **কগখ** = ∠ **ঘচঙ**,

এবং **খগ** = **ঙচ**, অথবা **খক** = **ঙঘ**।

তাহা হইলে △ **কখগ** ও △ **ঘঙচ** সর্ব্বাংশে সমান হইবে।

প্রথমতঃ, মনে কর **খগ** = **ঙচ**।

△ **কখগ** কে △ **ঘঙচ**'র উপর এরূপে স্থাপিত কর যে,

খ, **ঙ**'র উপর ও **খগ**, **ঙচ**'র উপর পড়ে,

তাহা হইলে **গ**, **চ**'র উপর পড়িবে, ∵ **খগ** = **ঙ চ**।

খক, **ঙঘ**'র উপর পড়িবে, ∵ ∠**খ** = ∠ **ঙ**,

এবং **গক**, **চঘ**'র উপর পড়িবে, ∵ ∠**গ** = ∠ **চ**।

আর **ক**, **ঘ**'র উপর পড়িবে,

∵ **খক** ও **গক**, **ঙঘ** ও **চঘ**'র উপর পড়িয়াছে।

কেন না, **ক** অন্যত্র পড়িলে, **খক** ও **ঙঘ**, এবং **গক** ও **চঘ**

এই দুই ঋজুরেখা যুগলের অথবা তাহাদের কোন এক যুগ্মের,

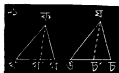
কেবল আংশিক মিলন হইবে, কিন্তু তাহা হইতে পাবে না, (স্বতঃসিদ্ধ ১০)।

অতএব △ **কখগ** ও △ **ঘঙচ** সম্পূর্ণরূপে মিলিত হইবে,
এবং ∴ △ **কখগ** = △ **ঘঙচ** সর্ব্বাংশে (স্বতঃসিদ্ধ ৯)।

দ্বিতীয়তঃ, মনে কর **কখ** = **ঘঙ**।
তাহা হইলে, ∵ ∠ **খ** + ∠ **গ** + ∠ **ক** = ২ সম∠ = ∠ **ঙ** + ∠ **চ** + ∠ **ঘ**,
এবং ∠ **খ** + ∠ **গ** = ∠ **ঙ** + ∠ **চ**,
∴ ∠ **ক** = ∠ **ঘ**।
এবং ∠ **খ** = ∠ **ঙ**।

সুতরাং এবারও ত্রিভুজদ্বয়ের সমান বাহুদ্বয় তাহাদের সমান সমান কোণের সন্নিহিত। এবং প্রথম বারে যে রূপে সপ্রমাণ হইয়াছে এবারেও ঠিক সেইরূপে সপ্রমাণ হইবে, △ **কখগ** = △ **ঘঙচ** সর্ব্বাংশে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৫।

যদি একটি ত্রিভুজের দুই বাহু আর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হয়, এবং তাহাদের এক যোড়া সমান বাহুর সম্মুখীন কোণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে তাহাদের অপর সমান বাহুযুগলের সম্মুখীন কোণদ্বয় সমান অথবা পরস্পরের পরিপূরক হইবে।

মনে কর **কখগ** (বা **কখগ′**) ও **ঘঙচ** দুটি ত্রিভুজ যাহাতে

কখ = **ঘঙ**, **কগ** (বা **কগ′**) = **ঘচ**, এবং ∠**কখগ** = ∠**ঘঙচ**।

তাহা হইলে ∠ **কগখ** (বা **কগ′খ**), ∠ **ঘচঙ**'ব সমান (বা পবিপূবক) হইবে।

△ **কখগ**কে △ **ঘঙচ**'র উপব এরূপে স্থাপিত কর যে,

খ, **ঙ**'র উপর পড়ে, ও **খগ**, **ঙচ**'র উপর পড়ে।

তাহা হইলে, **খক**, **ঙঘ**'ব উপর পড়িবে, ∵ ∠ **খ** = ∠ **ঙ**,

এবং **ক**, **ঘ**'র উপব পড়িবে, ∵ **খক** = **ঙঘ**,

এবং **কগ**, **ঘচ**'র উপব পড়িবে,

অথবা, যদি **কগ**, **কগ′** স্থানীয় হয়, তবে তাহা **ঘচ′** এর স্থানে পড়িবে।

প্রথমোক্ত স্থলে ∠ **কগখ**, ∠ **ঘচঙ**'র উপর পড়িবে,

∴ ∠ **কগখ** = ∠ **ঘচঙ**।

দ্বিতীয়োক্ত স্থলে ∠ **কগ′খ**, ∠ **ঘচ′ঙ**'র স্থানে পড়িবে,

∴ ∠ **কগ′খ** = ∠ **ঘচ′ঙ** হইবে,

অর্থাৎ ∠ **ঘচ′চ**'র পরিপূরক হইবে।

কিন্তু ∠ঘচ′চ = ∠ঘচঙ, ∵ ঘচ = কগ′ = ঘচ′।

∴ ∠কগ′খ, ∠ঘচঙ'র পরিপূরক হইবে।

টিপ্পনী। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১২, ১৩, ১৪, ও ১৫, দুই ত্রিভুজের সঙ্গতি অর্থাৎ সর্ব্বাংশে সমতা সম্বন্ধীয়। দুই ত্রিভুজের সেরূপ সমতা নিম্নোক্ত ব্যতিরেকস্থল ভিন্ন সর্ব্বত্রই থাকিবে, যদি এক ত্রিভুজের তিন কোণ ও তিন বাহু এই ছয়টি অবয়বের মধ্যে কোন তিনটি অপর ত্রিভুজের তদনুরূপ তিনটি অবয়বের সহিত যথাক্রমে সমান হয়।

যে সকল ভিন্ন ভিন্ন স্থল ঘটিতে পারে তাহা নিম্নে বিবৃত করা যাইতেছে।

১ (ক)। সমান অবয়বগুলি যদি দুই বাহু ও তদুভয়ের সন্নিহিত কোণ হয় তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বাংশে সমান হইবে। এই কথা ১২ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় প্রদর্শিত।

১ (খ)। সমান অবয়ব গুলি যদি দুই বাহু ও তন্মধ্যে এক বাহুর সন্নিহিত ও অপরের সম্মুখীন কোণ হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বাংশে সমান, অথবা তাহাদের অপর সমান বাহু যুগলের সম্মুখীন কোণদ্বয় পরস্পরের পরিপূরক, হইবে। এই কথা ১৫ উঃ প্রতিজ্ঞায় প্রদর্শিত।

২। সমান অবয়বগুলি যদি দুই কোণ ও এক অনুরূপস্থিত বাহু হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বাংশে সমান হইবে। এই কথা ১৪ উঃ প্রতিজ্ঞায় প্রদর্শিত।

৩। যদি সমান অবয়বগুলি তিন বাহু হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বাংশে সমান হইবে। এই কথা ১৩ উঃ প্রতিজ্ঞায় প্রদর্শিত।

৪। যদি সমান অবয়বগুলি তিন কোণ হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সমান না হইতে পারে। তাহা পার্শ্বের চিত্রে স্পষ্ট প্রকাশ।

খ১গ১, ও খ২গ২, খগ'র সমান্তর, সুতরাং

△কখগ, △কখ১গ১ ও △কখ২গ২ তিনটির মধ্যে প্রত্যেকেরই কোণত্রয় অপর দুইটির কোণত্রয়ের সহিত যথাক্রমে সমান (উঃপ্রঃ ৬), কিন্তু ত্রিভুজগুলি সমান নহে।

৫। অসঙ্গত ত্রিভুজদ্বয়ের একটি উদাহরণ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৬।

১। যদি একটি ত্রিভুজের দুই বাহু আর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হয়, কিন্তু সেই সেই সমান বাহু যুগলের অন্তর্গত কোণদ্বয় সমান না হয়, তাহা হইলে যে ত্রিভুজের সেই অন্তর্গত কোণ বৃহত্তর তাহার তৃতীয় বাহু অপর ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, যদি এক ত্রিভুজের দুই বাহু আর এক ত্রিভুজের দুই বাহুর সহিত সমান হয়, কিন্তু ত্রিভুজদ্বয়ের তৃতীয় বাহু যুগল সমান না হয়, তাহা হইলে যে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু বৃহত্তর, তাহার প্রথমোক্ত বাহু-দ্বয়ের অন্তর্গত কোণ অপর ত্রিভুজের তদনুরূপস্থিত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

১। মনে কর **কখগ** ও **ঘঙচ** দুটি △ যাহাতে **কখ=ঘঙ**, **কগ=ঘচ**,

কিন্তু ∠**খকগ** > ∠**ঙঘচ**।

তাহা হইলে **খগ**>**ঙচ**।

মনে কর **ঘঙ**, **ঘচ** অপেক্ষা বড় নহে,

এবং মনে কর ∠**ঙঘজ**=∠**খকগ**, **ঘজ=ঘচ=কগ**।

ঙজ যোগ কর, ও মনে কর **ঙজ**, **ঘচ**কে **হ**'তে ছেদ করিতেছে।
তাহা হইলে ∵ **ঘঙ**, **ঘচ** বা **ঘজ** অপেক্ষা বড় নহে,
∴ ∠**ঘজঙ**, ∠**ঘঙজ** অপেক্ষা বড় নহে (উঃ প্রঃ ১০)।
কিন্তু ∠**ঘহজ** > ∠**ঘঙজ** (উঃ প্রঃ ৮, অনুঃ ২)।
∵ ∠**ঘহজ** > ∠**ঘজঙ** অর্থাৎ ∠**ঘজহ**, এবং
∴ **ঘজ** বা **ঘচ** > **ঘহ**,
অর্থাৎ **হ**, **চ**'র উর্দ্ধে পড়িতেছে।
এখন ∵ **ঘজ** = **ঘচ**, ∴ ∠**ঘচজ** = ∠**ঘজচ**।
আর ∠**ঙচজ** > ∠**ঘচজ** বা ∠**ঘজচ**, এবং ∴ > ∠**ঙজচ**,
∴ **ঙজ** > **ঙচ**।
আবার, ∵ △**কখগ** ও △**ঘঙজ**তে, **কখ** = **ঘঙ**, **কগ** = **ঘজ**,
এবং ∠**খকগ** = ∠**ঙঘজ**,
∴ **খগ** = **ঙজ** (উঃ প্রঃ ১২)।
এবং ∴ **খগ** > **ঙচ**।

২। যদি △ **কখগ**, ও △ **ঘঙচ** তে
কখ = **ঘঙ**, **কগ** = **ঘচ**, কিন্তু **খগ** > **ঙচ**,
তাহা হইলে ∠**খকগ** > ∠**ঙঘচ**।
কারণ, তাহা না হইলে, ∠**খকগ** = বা < ∠**ঙঘচ**।
কিন্তু ∠**খকগ** = ∠**ঙঘচ** নহে,
∵ তাহা হইলে **খগ** = **ঙচ** হইত, যাহা কল্পনা বিরুদ্ধ।
এবং ∠**খকগ** < ∠**ঙঘচ** নহে,
∵ তাহা হইলে **খগ** < **ঙচ** হইত, যাহা কল্পনা বিরুদ্ধ।
∴ ∠**খকগ** > ∠**ঙঘচ**।

টিপ্পনী। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১২ ও ১৬ একত্র এই ভাবে প্রকাশ করা যাইতে পারে যথা,—

এক ত্রিভুজের দুই বাহু যথাক্রমে অপর এক ত্রিভুজের দুই বাহুর সমান হইলে, প্রথম ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু দ্বিতীয় ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর বড়, সমান, অথবা ছোট হইবে, যদি প্রথম ত্রিভুজের প্রথমোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, দ্বিতীয় ত্রিভুজের তৎসমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের বড়, সমান, অথবা ছোট হয়।

৬। সামান্তরিক।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৭।

সামান্তরিকের বিপরীত বাহু ও কোণ সমান, এবং প্রত্যেক কর্ণ তাহাকে সমান দ্বিখণ্ড করে।

মনে কর **কখগঘ** একটি ▱, এবং **কগ** ও **খঘ** তাহার কর্ণ।

তাহা হইলে, **কখ=গঘ, কঘ=গখ**. ∠**খকঘ**=∠**ঘগখ**,

∠**কখগ**=∠**গঘক**,

△**কখঘ**=△**গঘখ**,△**কখগ**=△**গঘক**।

কারণ, ∵ **কখ** ॥ **গঘ**, ∴ ∠**কখঘ**=∠**গঘখ** (উঃ প্রঃ ৫),

এবং ∵ **কঘ** ॥ **গখ**, ∴ ∠**কঘখ**=∠**গখঘ** (উঃ প্রঃ ৫)।

∴ △**কখঘ** ও △ **গঘখ** তে

∠**কখঘ**=∠**গঘখ**, ∠**কঘখ**=∠**গখঘ**, এবং **খঘ** উভয়ে আছে,

সুতরাং **কখ=গঘ, কঘ=গখ**, ∠**খকঘ**=∠**ঘগখ**,

এবং △ **কখঘ** =△**গঘখ** (উঃ প্রঃ ১৪)।

ঐরূপে দেখা যাইবে △**কখগ**=△**গঘক**।

আবার, ∵ ∠**কখঘ**=∠**গঘখ**, ও ∠**গখঘ**=∠**কঘখ**,

∴ যোগ করিলে ∠**কখগ**=∠**গঘক**।

অনুমান ১। দুই সমান ও সমান্তর ঋজু রেখার সমান সমান দিকের শেষ বিন্দুদ্বয়ের যোজক ঋজু রেখাদ্বয় সমান ও সমান্তর।

উপরের চিত্রে মনে কর **কখ** এবং **গঘ** সমান এবং সমান্তর।

তাহা হইলে, **কঘ** এবং **গখ**ও সমান এবং সমান্তর।

কগ যোগ কর। তাহা হইলে △ **কখগ** ও △ **গঘক** তে,

কখ = **ঘগ**, **কগ** উভয়েই আছে, ও ∠**খকগ**=∠**ঘগক**,

∴ **কঘ** = **গখ**, ∠ **কগখ** = ∠ **গকঘ** (উঃ প্রঃ ১২)।

এবং ∴ **কঘ** ‖ **গখ** (উঃ প্রঃ ৫)।

অনুমান ২। সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে তাহার সকল কোণই সমকোণ হইবে।

কারণ (উপরের চিত্রে)

∠ **খকঘ** + ∠ **কখগ** = ২ সম ∠ (উঃ প্রঃ ৬),

∴ যদি ∠ **খকঘ** = ১ সমকোণ,

তাহা হইলে ∠ **কখগ** = ১ সমকোণ।

এবং সামান্তরিকের অপর কোণদ্বয়

এই দুই কোণের সমান, সুতরাং তাহারও সমকোণ।

টিপ্পনী। **কখ** ও **খগ** বেষ্টিত আয়তকে সংক্ষেপে **কখ . খগ** আয়ত বলে।

অনুমান ৩। যদি তিন বা ততোধিক সমান্তর ঋজুরেখা তাহাদের কোন একটি ছেদক ঋজুরেখাকে সমান সমান খণ্ডে ভাগ করে, তবে তাহারা তাহাদের অপর সকল ছেদককেই সমান সমান খণ্ডে ভাগ করিবে।

মনে কর **কখ**, **গঘ**, **ঙচ** তিনটি সমান্তর ঋঃ রেঃ

এবং **জহ**'র খণ্ড **ঝঞ** = **ঞট**,

তাহা হইলে **লম**'র খণ্ড **নও** = **ওব**।

মনে কর **খওভ** ॥ **জহ**।

তাহা হইলে **ঝঞওখ**, **ঞটভও** ইহারা ▱,

এবং ∴ **ওখ** = **ঝঞ** = **ঞট** = **ওভ**।

এবং ∠ **ওখন** = ∠ **ওভব**, ∠ **ওনখ** = ∠ **ওবভ**,

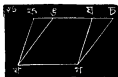
∴ △ **ওনখ** ও △ **ওবভ** হইতে, **ওন** = **ওব** (উঃ প্রঃ ১৪)।

অনুমান ৪। সমান্তর ঋজুরেখাদ্বয় সর্ব্বত্র সমদূরস্থিত।

কারণ, তাহাদের একটির কোন দুই বিন্দু হইতে অপরটির উপর দুটি লম্ব টানিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হইবে, এবং লম্বদ্বয় তাহার বিপরীত বাহু হইবে। সুতরাং লম্বদ্বয় সমান হইবে।

৭। সামান্তরিক ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

উপপাদ্যপ্রতিজ্ঞা—১৮।

এক ভূমির উপর স্থিত সম সমান্তর অন্তর্গত সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

মনে কর **কখগঘ, ঙখগচ** দুটি ▱
একই ভূমি **খগ**'র উপর স্থিত, এবং সম সমান্তর **খগ** ও **কচ**'র অন্তর্গত।

তাহা হইলে ▱ **কখগঘ** = ▱ **ঙখগচ**।

কারণ, ∵ **কখগঘ** ও **ঙখগচ** উভয়ই ▱,
∴ **কখ** = **ঘগ**, **খঙ** = **গচ** (উঃ প্রঃ ১৭)।
এবং, ∵ **কখ** ∥ **ঘগ**, **খঙ** ∥ **গচ**,
∠ **কখঙ** = ∠ **ঘগচ** (উঃ প্রঃ ৭, অনুঃ)।
∴ △ **কখঙ** = △ **ঘগচ** (উঃ প্রঃ ১২)।

এখন ক্ষেত্র **কখগচ** হইতে একবার △ **কখঙ**, আর একবার △ **ঘগচ** বাদ দিলে দুইবারের বাকী যথাক্রমে
▱ **ঙখগচ**, ও ▱ **কখগঘ**,
এবং এই বাকী দুইটি অবশ্যই সমান (স্বতঃসিদ্ধ ৩),
∴ ▱ **কখগঘ** = ▱ **ঙখগচ**।

টিপ্পনী ১। উপরের দুটি সামান্তরিক **কখগঘ** ও **ঙখগচ** ক্ষেত্রফলে সমান, কিন্তু সর্বাংশে সমান নহে। দুই ক্ষেত্রের সর্বাংশে সমতা না থাকিলেও কেবল ক্ষেত্রফলের সমতা থাকিতে পারে, এই প্রতিজ্ঞা তাহার প্রথম উদাহরণ।

উপরের প্রমাণ দৃষ্টে দেখা যাইতেছে, সামান্তরিকদ্বয়ের প্রত্যেকটিকেই কাটিয়া অপরটির সহিত সমান করা যাইতে পারে। অর্থাৎ ▱ **কখগঘ**'র বাম দিক হইতে △ **কখঙ** কাটিয়া দক্ষিণে যোগ করিলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহা ▱ **ঙখগচ**'র সহিত মিলিয়া যাইবে। এবং ▱ **ঙখগচ**'র দক্ষিণ দিক হইতে △ **চগঘ** কাটিয়া বামে যোগ করিলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহা ▱ **কখগঘ**'র সহিত মিলিয়া যাইবে।

টিপ্পনী ২। দুটি সামান্তরিক যদি এক ভূমির উপর থাকে, এবং তাহাদের **উচ্চতা**, অর্থাৎ ভূমির **বিপরীত** বাহুর কোন **বিন্দু** হইতে ভূমির উপর লম্ব সমান হয়, তবে তাহারা সমান হইবে।

কারণ, উভয়কেই ভূমির একদিকে স্থাপিত করিলে তাহারা সম সমান্তরের অন্তর্গত হইবে যেহেতুক তাহাদের ভূমির বিপরীত বাহুর কোন দুই বিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বদ্বয় টানিলে সমান হইবে, ও সমান্তর হইবে, সুতরাং সেই বিন্দুদ্বয়ের যোজক অবশ্যই ভূমির সহিত সমান্তর (উঃ প্রঃ ১৭, অনুঃ ১)।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৯।

সমান ভূমির উপর স্থিত সম সমান্তর অন্তর্গত সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্র ফল সমান।

মনে কর **কখগঘ** ও **ঙচজহ** দুটি ▱
সমান ভূমি **খগ** ও **চজ**'র উপর স্থিত, এবং
সম সমান্তর **কহ** ও **খজ**'র অন্তর্গত।
তাহা হইলে ▱ **কখগঘ** = ▱ **ঙচজহ**।

খঙ, গহ যোগ কর।

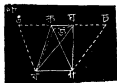
তাহা হইলে, ∵ **খগ** = **চজ** = **ঙহ** (উঃ প্রঃ ১৭),
এবং **খগ** ‖ **ঙহ**,
∴ **খঙ** ‖ **গহ** (উঃ প্রঃ ১৭, অনুঃ ১),
এবং ∴ **ঙখগহ** একটি ▱।
এবং **কখগঘ** = **ঙখগহ** (উঃ প্রঃ ১৮)
= **ঙচজহ** (উঃ প্রঃ ১৮)।

টিপ্পনী। সমান ভূমির উপর স্থিত ও সমান উচ্চতা বিশিষ্ট সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

কারণ, পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞার ২ টিপ্পনীতে প্রদর্শিত প্রক্রিয়াদ্বারা তাহাদিগকে সম সমান্তরের অন্তর্গত করা যাইতে পারে।

উপপাদ্যপ্রতিজ্ঞা—২০।

১। একই ভূমির উপর স্থিত সম সমান্তর অন্তর্গত ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, একই ভূমির উপর স্থিত সমান ত্রিভুজদ্বয় সম সমান্তর অন্তর্গত।

১। মনে কর **কখগ** ও **ঘখগ** দুটি △ একই ভূমি **খগ**'র উপর স্থিত সমসমান্তর **কঘ, খগ** অন্তর্গত।

তাহা হইলে △ **কখগ** = △ **ঘখগ**।

মনে কর **খঙ** ॥ **গক, গচ** ॥ **খঘ**,

এবং ▱ **ঙখগক**, ▱ **চগখঘ** সম্পূর্ণরূপে অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে ▱ **ঙখগক** = ▱ **চগখঘ** (উঃ প্রঃ ১৮),

এবং △ **কখগ** = ½ ▱ **ঙখগক**,

△ **ঘখগ** = ½ ▱ **চগখঘ** (উঃ প্রঃ ১৭)।

∴ △ **কখগ** = △ **ঘখগ** (স্বতঃসিদ্ধ ৭)।

২। মনে কর △ **কখগ** = △ **ঘখগ**।

তাহা হইলে **কঘ** ॥ **খগ**।

কারণ, যদি না হয়,

মনে কর **ঘজ** ॥ **খগ**।

তাহা হইলে △ **জখগ** = △ **ঘখগ** = △ **কখগ**,

যাহা কোন মতে হইতে পারে না (স্বতঃসিদ্ধ ৮),

যদি **জ** এবং **ক** মিলিত না হয়।

∴ **কঘ** ॥ **খগ**।

অনুমান ১। উপরের প্রতিজ্ঞা ও ১৭ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, যদি একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর স্থিত ও সম সমান্তর অন্তর্গত হয়, তবে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক।

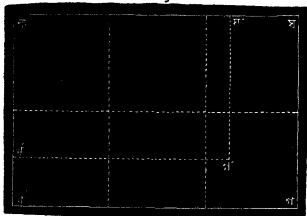
অনুমান ২। উপরের প্রতিজ্ঞা এবং ১৯ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, সমানভূমির উপর স্থিত ও সম সমান্তর অন্তর্গত ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

টিপ্পনী ১। উপরের প্রতিজ্ঞায় 'সম সমান্তর অন্তর্গত' এই কথাগুলির পরিবর্ত্তে "সমান উচ্চতাবিশিষ্ট" এই কথা বলিলেও প্রতিজ্ঞা সত্য হইবে। তাহা ১৮ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার দ্বিতীয় টিপ্পনী হইতে স্পষ্ট প্রতীয়মান হইতেছে।

টিপ্পনী ২। অষ্টাদশ হইতে বিংশ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সামান্তরিক ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে।

কোন প্রকার আয়তনকে সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করিতে হইলে, সেই প্রকারের একটি নির্দ্দিষ্ট আয়তনকে পরিমাণের একক বলিয়া লইতে হইবে, এবং পরিমেয় আয়তন সেই নির্দ্দিষ্ট আয়তনের কতগুণ অর্থাৎ তাহাতে সেই নির্দ্দিষ্ট আয়তন কত সংখ্যক বার আছে, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। তাহা হইলে সেই সংখ্যাই পরিমেয় আয়তনের পরিমাণ জ্ঞাপক হইবে। সেই সংখ্যা জানিলেই আমরা জানিব পরিমেয় আয়তন কত বড়, অর্থাৎ তাহা সেই নির্দ্দিষ্ট একক আয়তনের কতগুণ। কিন্তু মনে রাখিতে হইবে সেই সংখ্যা দ্বারা পরিমেয় আয়তনের কেবল **পরিমাণ** জানা যায়, তাহার **প্রকার** জানা যায় না।

যথা, মনে কর একটি দৈর্ঘ্যের পরিমাণ জানা উদ্দেশ্য, এবং মনে কর এক হাত দৈর্ঘ্য আমাদের নির্দ্দিষ্ট একক, ও পরিমেয়র দৈর্ঘ্য ৮০ হাত। তাহা হইলে ৮০ এই সংখ্যা সেই পরিমেয়র দৈর্ঘ্যের **পরিমাণ** জানাইয়া দিবে। কিন্তু সে দৈর্ঘ্য কি **প্রকার,** অর্থাৎ তাহা ঋজু কি কুটিল, তাহা ঐ সংখ্যা দ্বারা জানা যাইবে না।

ক্ষেত্রফলের পরিমাণ সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করিতে হইলে, একটি নির্দ্দিষ্ট ক্ষেত্রকে একক বলিয়া লইতে হইবে, এবং কোন পরিমেয় ক্ষেত্র সেই নির্দ্দিষ্ট ক্ষেত্রের কতগুণ তাহা যে সংখ্যা দ্বারা ব্যক্ত হয় সেই সংখ্যাই সেই ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রকাশ করিবে। দৈর্ঘ্য পরিমাণ নিমিত্ত যে নির্দ্দিষ্ট দৈর্ঘ্য একক বলিয়া গৃহীত হয়, তদুপরি অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ক্ষেত্রফল-পরিমাণার্থে নির্দ্দিষ্ট একক বলিয়া গ্রহণ করিলে একটি **সহজ** ও **সুবিধাজনক** একক গ্রহণ করা হইবে। এই একটি যে **সহজে** বোধগম্য তাহা অনায়াসেই দেখা যাইতেছে। ইহা যে **সুবিধাজনক** তাহা এখনই দর্শিত হইবে।

মনে কর **কখগঘ** আয়তের ক্ষেত্রফলের পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইবে, এবং মনে কর **কখ**=২ ইঞ্চ, **খগ**=৩ ইঞ্চ, এবং ১ ইঞ্চ, রৈখিক একক অর্থাৎ দৈর্ঘ্য মাপের একক বলিয়া গৃহীত হইল।

কখ ও **খগ** কে ২ ও ৩ ভাগে।ভাগ।।করিয়া, ও ভাগের বিন্দু দিয়া সমান্তর ঋজু রেখা টানিয়া, দেখা যাইতেছে, আয়তটি দুই সারি ছোট ছোট বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইল, এবং প্রত্যেক সারিতে তিনটি করিয়া ছোট ছোট বর্গক্ষেত্র রহিল। ঐ ছোট ছোট বর্গ ক্ষেত্রের প্রত্যেকটি এক ইঞ্চের উপর স্থিত। এবং তাহাদের সংখ্যা ২×৩=৬।

যদি প্রচলিত ভাষানুসারে **খগ** কে আয়তের **ভূমি** ও **কখ** কে আয়তের **উচ্চতা** বলা যায়, তাহা হইলে দেখা যাইতেছে,

আয়তের অন্তর্গত বর্গ।এককের অর্থাৎ রৈখিক এককের উপরস্থিত বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা =৬=৩×২

=আয়তের ভূমির অন্তর্গত রৈখিক এককের সংখ্যা

× ... উচ্চতার .. . .. ।

এই কথা সংক্ষেপে এই ভাবে বলা যায় যে—

আয়তের ক্ষেত্রফল তাহার ভূমি ও উচ্চতার গুণফলের সমান।

যখন ১৮ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা অনুসারে, একই ভূমির উপর স্থিত সমান উচ্চতাবিশিষ্ট আয়তের ও যে কোন সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান, তখন,

ইহাও বলা যায় যে,

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল তাহার ভূমির ও উচ্চতার গুণফলের সমান।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল তত্তুল্য ভূমির উপর স্থিত ও তত্তুল্য উচ্চতাবিশিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্দ্ধেক। অতএব সংক্ষেপে বলা যাইতে পারে যে—

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল তাহার ভূমির ও উচ্চতার গুণফলের অর্দ্ধেক।

যদি **কখ** ও **খগ**'র পরিমাণে ভগ্নাংশ থাকে তাহা হইলেও ঐ সকল কথা সত্য হইবে।

মনে কর **কখ′** = ১$\frac{১}{২}$ ইঞ্চ,

খ′গ′ = ২$\frac{১}{৪}$ " ।

তাহা হইলে আয়ত **কখ′গ′ঘ′** ক্ষেত্রে

২$\frac{১}{৪}$ × ১$\frac{১}{২}$ = ৩$\frac{৩}{৮}$ বর্গ ইঞ্চ থাকিবে,

অর্থাৎ ২ × ১ = ২ বর্গ ইঞ্চ (১ম সারে),

২ × $\frac{১}{২}$ = $\frac{১}{২}$ + $\frac{১}{২}$ = ১ ... (২য় সারে)

$\frac{১}{৪}$ × ১ = $\frac{১}{৪}$ " (১ম সারে),

$\frac{১}{৪}$ × $\frac{১}{২}$ = $\frac{১}{৮}$ " (২য় সারে)।

অতএব সাধারণতঃ

যদি **কখ** = অ রৈখিক একক

খগ = ই ... " ,

তাহা হইলে আয়ত **কখগঘ** = অই বর্গ একক,

অথবা সংক্ষেপে

যদি **কখ** = অ,

খগ = ই,

তাহা হইলে আয়ত **কখগঘ** = অই।

এইট অতি **সুবিধাজনক** সাঙ্কেতিক বাক্য,

এবং তাহা রৈখিক এককের উপর স্থিত বর্গক্ষেত্রকে বর্গ একক বলিয়া মানিয়া লওয়ার ফল।

যদি অ = ই, তাহা হইলে

কখগঘ একটি বর্গক্ষেত্র হইবে এবং

তাহার ক্ষেত্রফল = অ^2 ।

টিপ্পনী ৩। যদি মনে করা যায় যে উপরের চিত্রে **কঘ** যে ৩ খণ্ডে বিভক্ত হইয়াছে তাহা যথাক্রমে

= অ, ই, উ, এবং **কখ**´ = ঋ ,

তাহা হইলে **কঘ** = অ + ই + উ।

এবং আয়ত **কখ´গ´ঘ´** = (অ + ই + উ) ঋ।

কিন্তু আয়ত **কখ´গ´ঘ** এর অন্তর্গত আয়ত তিনটি

যথাক্রমে = অঋ, ইঋ, উঋ।

∴ (অ + ই + উ) ঋ = অঋ + ইঋ + উঋ।

টিপ্পনী ৪। আয়তের নাম করণ সঙ্ক্ষেপে তাহার বিপরীত কোণদ্বয় স্থিত অক্ষরদ্বয় দ্বারা হইয়া থাকে। যথা,

আয়ত **কখগঘ** কে আয়ত **কগ** বা আয়ত **খঘ** বলা যায়।

৮। ত্রিভুজের এক বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র ও অপর বাহুদ্বয়ের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের পরস্পর সম্বন্ধ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২১।

সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণ সম্মুখীন বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র অপর বাহুদ্বয়ের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র দ্বয়ের সমষ্টির সমান।

মনে কর **কখগ** সমকোণী △, ও **খকগ** তাহার সম ∠।

তাহা হইলে **খগ**'র উপর বর্গ ক্ষেত্র

= **কখ**'র উপর বর্গক্ষেত্র + **কগ**'র উপর বর্গক্ষেত্র।

মনে কর **খঘঙগ, কখচজ**, ও **কগহঝ**, যথাক্রমে

খগ, কখ, ও **কগ**'র উপর বর্গক্ষেত্র।

কঘ ও **গচ** যোগ কর, এবং মনে কর **কঞ** ‖ **খঘ** বা **গঙ**।

তাহা হইলে, ∵ ∠**খকগ**=সম∠, ও ∠**খকজ**=সম∠ (উঃ প্রঃ ১৭, অনুঃ২),

∴ **গক** ও **কজ** একই | (উঃ প্রঃ ২) এবং ‖ **খচ**।

এবং ∵　∠**গখঘ**=∠**কখচ** (কারণ উভয়ই সম∠)

∴　∠**কখগ** উভয়ের সহিত যোগ করিলে, ∠**কখঘ**=∠**চখগ**।

এবং　**কখ**=**চখ, খঘ**=**খগ**।

∴　△**কখঘ**=△ **চখগ** (উঃ প্রঃ ১২)।

আবার, ▭　**খঞ**=২ × △ **কখঘ**,

এবং □ **কখচজ**=২ × △ **চখগ** (উঃ প্রঃ ২০, অনুঃ ১),

∴ ▭ **খঞ** =□ **কখচজ**।

ঐরূপে দেখা যাইবে $\square$**গঞ্জ** $=\square$**কগহঝ**।

$\therefore$ $\square$**খঞ** $+\square$**গঞ** অর্থাৎ $\square$**খঙ** $=\square$**কখচজ** $+\square$**কগহঝ**,

অর্থাৎ **খগ**'র উপর বর্গক্ষেত্র $=$ **কখ**'র উপর বর্গক্ষেত্র
$+$ **কগ**'র উপর বর্গক্ষেত্র।

টিপ্পনী ১। এই প্রতিজ্ঞা গ্রীসের গণিতবেত্তা পিথাগোরাসের নামে অভিহিত। কিন্তু এই তত্ত্বটি হিন্দুরা বহুপূর্ব্ব হইতে জানিতেন, এবং শুল্ব সূত্রই তাহার প্রমাণ। এসিয়াটিক সোসাইটির পত্রিকা ৪৪ সংখ্যা (১৮৭৫) ২২৭ পৃষ্ঠায় প্রকাশিত ডা থিবো সাহেবের প্রবন্ধ এ সম্বন্ধে দ্রষ্টব্য।

টিপ্পনী ২। সমকোণের সম্মুখীন বাহুকে **কর্ণ** বলে।

এই প্রতিজ্ঞার তত্ত্ব সংক্ষেপে এইরূপে প্রকাশ করা যাইতে পারে

$$\textbf{খগ}^2 = \textbf{কখ}^2 + \textbf{কগ}^2 ,$$

অথবা যদি **খগ** $=$ অ, **কগ** $=$ ই, **কখ** $=$ উ,

তাহা হইলে $\quad$ অ$^2=$ই$^2+$উ^2।

যদি ই $=$ উ

তাহা হইলে, অ$^2=2$ই^2,

এবং $\quad$ অ $=\sqrt{2}$ ই।

অতএব বর্গক্ষেত্রের **কর্ণ** $=\sqrt{2}\times$ বাহু।

কিন্তু $\sqrt{2}$ এর ঠিক মূল্য সসীম সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায় না। তবে বর্গমূল আকর্ষণের নিয়মানুসারে ২ এর বর্গমূলের দশমিকের ঘরের সংখ্যা যত বৃদ্ধি করা যাইবে ততই নির্ণীত মূল্য প্রকৃত মূল্যের সন্নিহিত হইতে থাকিবে। (পাটীগণিতের ১৭৫ ধারা দ্রষ্টব্য)।

গণনা দ্বারা জানা যায় $\sqrt{2}=১.৪১৪২১৩$ ।

যদি বর্গক্ষেত্রের বাহু ১ ইঞ্চ হয় এবং $\sqrt{2}$ এর মূল্য দশমিকের ৪ ঘর পর্য্যন্ত লওয়া যায় তাহা হইলে সেই বর্গক্ষেত্রের কর্ণ ১.৪১৪২ ইঞ্চ হইবে। এবং $\frac{১}{১০০০০}$ ইঞ্চ যদি রৈখিক একক হয়, তাহা হইলে সেই বর্গক্ষেত্রের বাহু ১০০০০ দ্বারা ও তাহার কর্ণ ১৪১৪২ দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে। আর এই শেষোক্ত সংখ্যা ও কর্ণের প্রকৃত মূল্যের প্রভেদ $\frac{১}{১০০০০}$ ইঞ্চ অপেক্ষা অল্প হইবে, এবং তাহা ধর্ত্তব্য নহে।

অতএব কার্য্যতঃ সকল আয়তনই সংখ্যা দ্বারা পরিমেয় বলা যাইতে পারে, এবং তাহাদের প্রকৃত মূল্যের যতদূর সন্নিহিত সংখ্যা লওয়া আবশ্যক হইবে, ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর একক লইয়া (অর্থাৎ সেই মূল্যের দশমিকের ঘর বৃদ্ধি করিয়া) ততদূরই যাওয়া যাইতে পারে।

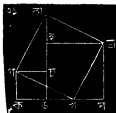
টিপ্পনী ৩। সমকোণী ত্রিভুজের যে কোন দুটি বাহু জানা থাকিলে তৃতীয়টি জানা যায়

কারণ $অ^২ = ই^২ + উ^২$।

$\therefore$ $ই^২ = অ^২ - উ^২$,

$উ^২ = অ^২ - ই^২$।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ২১এর আর এক প্রকার প্রমাণ নিম্নে প্রদর্শিত হইতেছে।

মনে কর **কখগ** সমকোণী △, এবং ∠ **ক** তাহার সম ∠।

মনে কর **খঘ** = **কগ**, **কঙ** = **কগ**.

তাহা হইলে **ঙঘ** = **কখ**।

মনে কর **কগচঙ** ও **ঙঘজহ**, **কগ** ও **ঙঘ**'র উপর বর্গক্ষেত্র,

তাহা হইলে **ঙঘজহ** = **কখ**'র উপর বর্গক্ষেত্র।

চহকে **ঝ** পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর, এবং মনে কর **হঝ** = **কগ**,

ও **গঝ জঝ, জখ** যোগ কর।

তাহা হইলে **খঘজ, ঝহজ, গচঝ** এই ত্রিভুজত্রয় সহজেই দেখা যায়,

△ **কখগ**'র সহিত সর্ব্বাংশে সমান (উঃ প্রঃ ১২)।

∴ **গখ** = **খজ** = **জঝ** = **ঝগ**।

এবং ∠**ঝজহ** = ∠**খজঘ**,

∴ ∠**ঝজখ** = ∠**ঘজহ** = সম ∠।

আবার ∠**গঝজ** = ∠**গঝচ** + ∠**হঝজ**

= ∠**গঝচ** + ∠**চগঝ**

= সম ∠ । (উঃ প্রঃ ৮)।

অতএব **খগঝজ**, **খগ**'র উপর বর্গক্ষেত্র।

এবং **খগঝজ** বা **খগ**'র উপর বর্গক্ষেত্র

= **গখজহচ** ক্ষেত্র + △ **ঝহজ** + △**গচঝ**

= **গখজহচ** ক্ষেত্র + △ **খঘজ** + △ **খকগ**

= বর্গক্ষেত্র **ঙঘজহ** + বর্গক্ষেত্র **কঙচগ**

= **কখ**'র উপরে বর্গক্ষেত্র + **কগ**'র উপর বর্গক্ষেত্র।

টিপ্পনী ৪। এই প্রমাণে দেখা যাইতেছে, কর্ণের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রকে **গখজহচ, ঝহজ,** ও **ঝচগ** এই তিন খণ্ড করিয়া শেষের দুই খণ্ড তাহার দুই পার্শ্বে রাখিলে অর্থাৎ **খগ** ও **খজ**'র সংলগ্ন করিলে, **কগ** ও **কখ**'র উপরিস্থ বর্গদ্বয় এদ্বয় সংলগ্ন থাকিলে যে স্থান পূরণ করে, ঐ খণ্ডত্রয় সেই স্থান পূরণ করে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২২।

যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র তাহার অপর বাহুদ্বয়ের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তাহা হইলে সেই ত্রিভুজের প্রথমোক্ত বাহুর বিপরীত কোণ সমকোণ।

মনে কর △ **কখগ**তে

খগ'র উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র = **কখ**'র উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র
+ **কগ**'র উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র।

তাহা হইলে ∠ **খকগ** = সম ∠।

মনে কর **কঘ** ⊥ **কগ** এবং = **কখ**। **গঘ** যোগ কর।

তাহা হইলে,

ঘগ'র উপর বঃ ক্ষেঃ = **কগ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ
+ **কঘ**'র · (উঃ প্রঃ ২১)
= **কগ**'র ·
+ **কখ**'র · · (∵ **কঘ** = **কখ**)
= **খগ**'র · (কল্পনানুসারে)।

∴ ঘগ = খগ।

অতএব △ **কখগ** ও △ **কঘগ** তে,

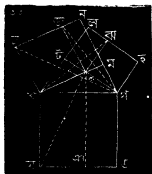
কখ = **কঘ**, **কগ** উভয়েই আছে,

এবং **খগ** = **ঘগ**,

∴ ∠**খকগ** = ∠ **ঘকগ** = সম ∠ ।

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞা ২১ প্রতিজ্ঞার পরিবৃত্তি।

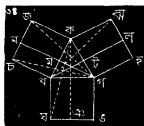
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২৩।

ত্রিভুজের কোন একবাহুর উপরিস্থ বর্গ ক্ষেত্র তাহার অপর দুই বাহুর উপরিস্থ বর্গ ক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান, অথবা তদপেক্ষা বৃহত্তর, বা ক্ষুদ্রতর হইবে, যদি প্রথমোক্ত বাহুর বিপরীত কোণ সমকোণ, বা স্থূল কোণ, বা সুক্ষ্ম কোণ হয়। এবং শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের মধ্যে যে কোন বাহু, ও উক্ত কোণের বিন্দু এবং সেই বাহুর উপর তদ্বিপরীত কোণ হইতে পতিত লম্বের সম্পাত বিন্দুর মধ্যে স্থিত সেই বাহুর অংশ, এই ঋজুরেখাদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ, সেই বৃহত্তা বা ক্ষুদ্রত্বের পরিমাণের সমান হইবে।

১ম চিত্র

২য় চিত্র

মনে কর **কখগ** একটি △।

তাহা হইলে **খগ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ = বা > বা <
কখ'র উপর বঃ ক্ষেঃ + **কগ**'র উপব বঃ ক্ষেঃ

যদি ∠**খকগ** = বা > বা < সম ∠।

এবং শেষোক্ত দুই স্থলে, যদি খট ⊥ গক, গম ⊥ খক, তাহা হইলে
খগ'র উপর বঃ ক্ষেঃ = কখ'র উপর বঃ ক্ষেঃ + কগ'র উপর বঃ ক্ষেঃ
± ২ × কখ ও কম লইয়া আয়ত
বা ২ × কগ ও কট লইয়া আয়ত।

এই প্রতিজ্ঞার প্রথম কথাটি ইহার পূর্ব্ববর্ত্তী প্রতিজ্ঞায় সপ্রমাণ করা হইয়াছে।

দ্বিতীয় ও তৃতীয় কথা সপ্রমাণ করণার্থে
১ম ও ২য় চিত্র দ্রষ্টব্য।
উপরের ২১ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার
প্রমাণ প্রণালী অবলম্বনে দেখা যায়,
△ কখঘ = △ চখগ,
∴ আয়ত খঞ = আয়ত খন = কখ'র উপর বঃ ক্ষেঃ ± আয়ত মজ।

এবং সেই কারণে
আয়ত গঞ = আয়ত গল = কগ'র উপর বঃ ক্ষেঃ ± আয়ত টঝ।

∴ সমানে সমানে যোগ করিলে,
আয়ত খঞ + আয়ত গঞ অর্থাৎ খগ'র উপর বঃ ক্ষেঃ
= কখ'র উপর বঃ ক্ষেঃ + কগ'র উপর বঃ ক্ষেঃ
± আয়ত মজ ± আয়ত টঝ।

আবার, ∠খকজ = সম∠ = ∠গকঝ,
এবং উভয়দিকে ∠জকঝ (১ম চিত্রে)
বা ∠খকগ (২য় চিত্রে)
যোগ করিলে,
∠জকগ = ∠ঝকখ।

আর　জক = খক, কগ = কঝ।

∴ △জকগ = △খকঝ (উঃ প্রঃ ১২)।

∴ আয়ত মজ = আয়ত টঝ।

∴ **খগ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ

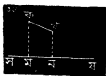
=**কখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ+**কগ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ

±২×আয়ত **মজ** বা ±২×আয়ত **টব**

=**কখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ+**কগ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ

±২×**কখ** ও **কম** লইয়া আয়ত

বা ±২×**কগ** ও **কট** লইয়া আয়ত।

টিপ্পনী ১। যদি এক ঋজু রেখার দুই প্রান্ত হইতে অপর কোন ঋজুরেখার উপর দুই লম্ব টানা যায়, লম্বদ্বয়ের সম্পাতবিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত দ্বিতীয় রেখার অংশকে দ্বিতীয় রেখার উপর প্রথম রেখার **প্রক্ষেপণী** বলা যায়।

যথা, উপরের চিত্রে

মন, **সয**'র উপর **কখ**'র প্রক্ষেপণী।

উপরের ১ম ও ২য় চিত্রে

কম, **কখ**'র উপর **কগ**'র প্রক্ষেপণী,

কট, **কগ**'র উপর **কখ**'র প্রক্ষেপণী,

কারণ **ক** হইতে **কখ** বা **কগ**'র উপর লম্বের সম্পাত বিন্দু **ক**।

উপরি উক্ত পারিভাষিক শব্দ ব্যবহার করিলে,

এই প্রতিজ্ঞা সংক্ষেপে এইরূপে প্রকাশ করা যায়—

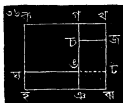
ত্রিভুজের কোন এক বাহুর উপর স্থিত বর্গক্ষেত্র যথাক্রমে অপর বাহুদ্বয়ের উপর স্থিত বর্গক্ষেত্র দ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর, বা তাহার সমান, বা তদপেক্ষ ক্ষুদ্রতর হইবে, যদি প্রথমোক্ত বাহুর বিপরীত কোন যথাক্রমে স্থূল কোণ, সমকোণ, বা সূক্ষ্ম কোণ হয়, এবং সেই বৃহত্ত্ব বা ক্ষুদ্রত্বের পরিমাণ দ্বিতীয়োক্ত বাহুদ্বয়ের যে কোন বাহু ও তদুপরি অপর বাহুর প্রক্ষেপণী এই উভয় লইয়া আয়ত ক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

টিপ্পনী ২। এই প্রতিজ্ঞা পূর্ববর্ত্তী ২১ প্রতিজ্ঞা ও পরবর্ত্তী ২৪ প্রতিজ্ঞা (যাহা স্বাধীন ভাবে সপ্রমাণ করা হইয়াছে) এই দুই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে নিম্নলিখিতরূপে প্রতিপন্ন করা যায় যথা,

$$খগ^২ = খম^২ + গম^২ \text{ (উঃ প্রঃ ২১)}$$
$$= (কখ \pm কম)^২ + গম^২$$
$$= কগ^২ \pm ২কখ.কম + কম^২ + গম^২ \text{ (উঃ প্রঃ ২৪, টিঃ ১, ২)}$$
$$= কখ^২ + কগ^২ \pm ২কখ.কম \text{ (উঃ প্রঃ ২১)।}$$

৯। আয়ত ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২৪।

যদি কোন ঋজুরেখা যে কোন দুই খণ্ডে বিভক্ত করা যায়, তাহা হইলে সমস্ত রেখার উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র, খণ্ডদ্বয়ের উপরিস্থ বর্গ ক্ষেত্রদ্বয় ও খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ, এই তিনের সমষ্টির সমান হইবে।

মনে কর **কখ**'কে **কগ** ও **গখ** দুই খণ্ডে বিভক্ত করা হইয়াছে।
তাহা হইলে **কখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ
= **কগ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ + **গখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ
+ ২ × আয়ত **কগ, গখ**।

মনে কর **কহঝখ, কঘঙগ** ও **গচজখ,**
কখ, কগ, ও **গখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ।

গঙ বৰ্দ্ধিত কর এবং মনে কর **ঞ**তে **হঝ**'র সহিত মিলিত হইয়াছে।

তাহা হইলে, ∵ **কহ = কখ,** এবং **কঘ = কগ,**
∴ **ঘহ = গখ**। এবং **ঘঙ = কগ**।
আবার, ∵ **খঝ = কখ,** এবং **খজ = গখ,**
∴ **জঝ = কগ**। এবং **চজ = গখ**।
∴ আয়ত **ঘঞ** = আয়ত **ঘঙ, ঘহ** = আয়ত **কগ, গখ**।
এবং আয়ত **জঞ** = আয়ত **জঝ, চজ** = আয়ত **কগ, গখ**।

এবং **কহঝখ** = **কঘঙগ** + **গচজখ** + **ঘঞ** + **জঞ**।

∴ **কখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ = **কগ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ + **গখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ
+ ২ × আয়ত **কগ, গখ**।

অনুমান ১। যদি **কগ** = **গখ**,
কখ'র উপর বঃক্ষেঃ = ৪ × **কগ**'র উপর বঃক্ষেঃ।

অনুমান ২। যদি দুটি ঋজুরেখার একটি অবিভক্ত থাকে ও অপরটি নানা খণ্ডে বিভক্ত হয়, তবে ঐ রেখাদ্বয় লইয়া যে আয়ত হয় তাহা, অবিভক্ত রেখা ও বিভক্ত রেখার প্রত্যেক খণ্ড লইয়া যে যে আয়ত হয় তাহাদের সমষ্টির সমান হইবে।

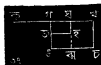
যথা, আয়ত **কহ, কগ** = আয়ত **কঘ, কগ**
+ আয়ত **ঘহ, কগ**।

টিপ্পনী ১। যদি **কগ**=অ, **খগ**=ই,
তাহা হইলে **কখ** = অ + ই,
এবং (অ+ই)^{২} = অ^{২} + ২ অই + ই^{২}।
বীজগণিতের এই সাঙ্কেতিক বাক্য, উপরের ২৪ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার অনুরূপ।

টিপ্পনী ২। যদি **কখ**=অ, **খগ** = ই,
তাহা হইলে **কগ**=অ−ই,
এবং বঃ ক্ষেঃ **কঙ** = বঃ ক্ষেঃ **কঝ** + বঃ ক্ষেঃ **গজ**
− আয়ত **ঘঝ** − আয়ত **গঝ**,
অর্থাৎ (অ−ই)^{২} = অ^{২} − ২অই + ই^{২}।

টিপ্পনী ৩। যদি **কগ** = অ, **খগ** = ই,
তাহা হইলে
অ (অ+ই) = **কট** = **কঙ** + **গট**
= অ^{২} + অই।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২৫।

যদি কোন ঋজুরেখা সমদ্বিখণ্ডে, ও অন্তরে বিষম দ্বিখণ্ডে, বিভক্ত হয়, তাহা হইলে তাহার অর্দ্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্রের ও বিভাগ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের অন্তর তাহার বিষম খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

মনে কর | **কখ**, গ'তে সমদ্বিখণ্ডে ও ঘ'তে বিষম দ্বিখণ্ডে বিভক্ত।

তাহা হইলে **গখ**'র উপর বঃক্ষেঃ—**গঘ**'র উপর বঃক্ষেঃ=আয়ত **কঘ·ঘখ**।

মনে কর **গঙচখ** ও **গজহঘ**, **গখ**'র ও **গঘ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ।

ঘহকে বর্দ্ধিত করিয়া **ঝ**তে **ঙচ**'র সহিত মিলাও।

তাহা হইলে, ∵ **খচ=খগ=কগ**,

∴ আয়ত **ঘচ**=আয়ত **কগ·ঘখ**।

আবার, ∵ **গঙ=গখ**, **গঘ=গজ**,

∴ **জঙ=ঘখ**।

এবং **জহ=গঘ**।

∴ আয়ত **জঝ**=আয়ত **গঘ·ঘখ**।

∴ আয়ত **ঘচ**+আয়ত **জঝ**=আয়ত **কগ·ঘখ**+ আয়ত **গঘ·ঘখ**

=আয়ত (**কগ+গঘ**) **ঘখ**

=আয়ত **কঘ·ঘখ**।

অতএব, **গখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ—**গঘ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ

=**গচ−গহ=ঘচ+জঝ**

=আয়ত **কঘ·ঘখ**।

অনুমান। অতএব কোন ঋজু রেখা দুই খণ্ডে বিভক্ত হইলে সেই খণ্ডদ্বয় যখন সমান হইবে তখন তাহাদের অন্তর্গত আয়ত বৃহত্তম হইবে।

কারণ আয়ত **কগ·গখ = গখ² = কঘ·ঘখ + গঘ²**

< আয়ত **কঘ·ঘখ**।

টিপ্পনী ১। যদি **কগ = গখ** = অ, **গঘ** = ই, তাহা হইলে

কঘ = (অ + ই), **ঘখ** = (অ − ই),

এবং অ² − ই² = (অ + ই) (অ − ই)।

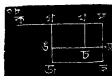
বীজগণিতের এই সাঙ্কেতিক বাক্য, উপরের ২৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞাব অনুরূপ।

টিপ্পনী ২। যদি অনেকগুলি আয়তন কতকগুলি নির্দ্দিষ্ট নিয়মাধীন হয়, তবে তন্মধ্যে বৃহত্তম আয়তনকে **গরিষ্ঠ ফল** ও ক্ষুদ্রতম আয়তনকে **লঘিষ্ঠ ফল** বলে।

যথা, ঋজুরেখার খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের গরিঠ ফল খণ্ডদ্বয় সমান হইলেই পাওয়া যায়। তাহা উপরের অনুমানে প্রদর্শিত হইয়াছে।

আবার কোন বিন্দু হইতে কোন ঋজুরেখার উপর যত ঋজু রেখা টানা যাইতে পারে, তাহাদের লঘিষ্ঠ ফল লম্ব। তাহা ১০ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার অনুমানে প্রদর্শিত হইয়াছে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২৬।

যদি কোন ঋজুরেখা সমদ্বিখণ্ডে বিভক্ত, ও কোন বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত, অর্থাৎ সেই বিন্দুতে বাহিরে বিষম দ্বিখণ্ডে বিভক্ত, হয়, তাহা হইলে তাহার অর্দ্ধেকের উপর বর্গক্ষেত্রের ও ঐ বিভাগবিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশের উপর বর্গক্ষেত্রের অন্তর তাহার বিষম খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

মনে কর | **কখ, গ**তে সম দ্বিখণ্ডে বিভক্ত,
ও **ঘ**তে বাহিরে বিষম দ্বিখণ্ডে বিভক্ত, অর্থাৎ **ঘ** পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত।

তাহা হইলে **ঘগ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ—**গখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ
=আয়ত **কঘ·ঘখ**।

মনে কর **গঙচখ, গজহঘ, গখ**'র ও **গঘ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ,
এবং **ঙচ**কে বর্দ্ধিত করিয়া **ঝ**তে **ঘহ**'র সহিত মিলাও।
তাহা হইলে ২৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় যে রূপে প্রদর্শিত হইয়াছে
সেইরূপ দেখা যাইবে,

আয়ত **ঘচ** =আয়ত **কগ·ঘখ**,
আয়ত **জঝ** = আয়ত **গঘ·ঘখ**।

∴ আয়ত **ঘচ**+আয়ত **জঝ** = আয়ত **কগ·ঘখ**+আয়ত **গঘ·ঘখ**
=আয়ত (**কগ**+**গঘ**)·**ঘখ**
=আয়ত **কঘ · ঘখ**।

অতএব **গঘ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ — **গথ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ

= **গহ** — **গচ** = **ঘচ** + **জঝ**

= আয়ত **কঘ·ঘথ**।

টিপ্পনী ১। যদি **কগ** = **গথ** = অ, **গঘ** = ই, তাহা হইলে,

কঘ = ই + অ, **ঘথ** = ই — অ,

এবং ই^{২} — অ^{২} = (ই + অ) (ই — অ)।

অতএব উপরের ২৫ ও ২৬ উভয় উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার তত্ত্ব বীজগণিতের একই সাঙ্কেতিক বাক্য দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

টিপ্পনী ২। যদি কোন ঋজুরেখা কোন বিন্দু পর্যন্ত বর্দ্ধিত হয়, তাহা হইলে সেই বিন্দুকে তাহার **বাহিরের** বিভাগ বিন্দু স্বরূপ মনে করা যাইতে পারে। এবং সেই ভাবে দেখিলে, সেই বিন্দু হইতে তাহার সীমাবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব তাহার দুই খণ্ড বলিয়া মনে করা যাইতে পারে। তবে সেই খণ্ডদ্বয় মধ্যে একখণ্ড সেই ঋজুরেখা অপেক্ষা বড় হইবে।

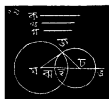
তৃতীয় পরিচ্ছেদ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা।

উপক্রমণিকা। পরবর্ত্তী সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা কয়েকটি হইতে বিদ্যার্থী দেখিতে পাইবেন, কেবল ১, ২, ৩ স্বীকৃত কথায় সাহায্যে কিপ্রকারে শুদ্ধরূপে চিত্রাঙ্কন ও জ্যামিতিব জটিল অঙ্কন কার্য্য সম্পাদিত হইতে পারে।

১। ত্রিভুজ ও কোণ অঙ্কন।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

তিনটি ঋজুরেখার (যাহাদের যে কোন দুইটির সমষ্টি অপরটির অপেক্ষা বড়) এক একটির সহিত সমান এক একটি বাহু হইবে, এইরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

মনে কর ক, খ, গ তিনটি | যাহাদের যে কোন দুটির সমষ্টি অপরটি অপেক্ষা বড়।

একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে যাহার বাহুত্রয়

ক, খ, গ'র সহিত সমান।

একটি ঋঃ রেঃ ঘঙ টানিয়া, ঘচ=ক করিয়া লও।

ঘ'কে কেন্দ্র ও | খ'কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ হজ আঁক,

এবং চ'কে কেন্দ্র ও | গ'কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ ঝজ আঁক।

এই বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে অবশ্যই ছেদ করিবে।

কারণ তাহারা একের সম্পূর্ণ বাহিরে অপর থাকিতে পারে না,

∵ খ+গ>ক বা ঘচ।

এবং একের সম্পূর্ণ ভিতরেও অপর থাকিতে পারে না,

∵ ক+খ>গ, ও ক+গ>খ।

মনে কর বৃত্তদ্বয় জ'তে পরস্পরকে ছেদ করিতেছে।

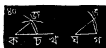
জঘ, জচ যোগ কর।

তাহা হইলে △ **জঘচ** ইষ্ট △।

কারণ, ঘচ= | ক, ঘজ= | খ, ও জচ= | গ।

টিপ্পনী। নির্দ্দিষ্ট রেখাত্রয়ের যে কোন দুটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বড় হওয়া আবশ্যক। কারণ তাহা না হইলে সেই রেখাত্রয় কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমান হইতে পারে না, যেহেতুক ত্রিভুজ মাত্রের যে কোন বাহুদ্বয়ের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড় (উঃ প্রঃ ১১ দ্রষ্টব্য)। এবং ঐ কথা রক্ষা না হইলে উপরের চিত্রে বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করিবে না।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—২।

নির্দ্দিষ্ট ঋজু রেখার নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত কর।

মনে কর **কখ** নির্দ্দিষ্ট |, **ক** নির্দ্দিষ্ট বিন্দু,

এবং ∠ **গঘঙ** নির্দ্দিষ্ট ∠।

কখ |'র **ক** বিন্দুতে ∠ **গঘঙ**'র সমান ∠ আঁকিতে হইবে।

ঘগ তে যে কোন বিন্দু **গ** লইয়া **ঘ**কে কেন্দ্র ও **ঘগ**কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ **গঙ** আঁক,

ও মনে কর ঐ বৃত্ত **ঘঙ**কে **ঙ**'তে ছেদ করিতেছে।

ঙগ যোগ কর।

ককে কেন্দ্র ও **ঘগ**কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ **চ́জ** আঁক,

ও মনে কর ঐ বৃত্ত **কখ**কে **চ**'তে ছেদ করিতেছে।

চকে কেন্দ্র ও **গঙ**কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া একটি ⊙ আঁক,

ও মনে কর ঐ বৃত্ত⊙**চজ**কে **জ**'তে ছেদ করিতেছে।

কজ ও **চজ** যোগ কর।

তাহা হইলে ∠ **চকজ** ইষ্ট ∠ হইবে।

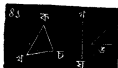
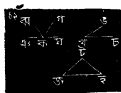
কারণ **কচ**=**ঘগ**, **কজ**=**ঘঙ**, **চজ**=**গঙ**,

∴ ∠ **চকজ** = ∠ **গঘঙ** (উঃ প্রঃ ১৩)।

অনুমান। ত্রিভুজের নির্ণায়ক যে কোন অবয়বত্রয় নির্দ্দিষ্ট থাকিলে, এই প্রতিজ্ঞা এবং ইহার পূর্ব্ববর্ত্তী প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সেই ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে পারা যায়।

১। নির্দ্দিষ্ট অবয়বত্রয় তিনটি বাহু হইলে, সঃ প্রঃ ১ দ্বারা ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে।

২। নির্দ্দিষ্ট অবয়বত্রয় দুই বাহু ও তদন্তর্গত কোণ হইলে,

বাহু **কখ**'র **ক** বিন্দুতে ∠**খকচ**=নির্দ্দিষ্ট ∠ঙ অঙ্কিত করিয়া, **কচ**=বাহু **গঘ** করিয়া লইয়া **খচ** যোগ করিলে, △**কখচ** ইষ্ট △ হইবে।

৩। নির্দ্দিষ্ট অবয়বত্রয় দুই কোণ ও এক বাহু হইলে, নিম্নের অঙ্কন প্রক্রিয়া অবলম্বনীয়।

মনে কর ∠**গকঘ** ও ∠**ঙখচ** ও বাহু **জহ**, বা **টজ**, নির্দ্দিষ্ট অবয়ব ত্রয়।

প্রথমতঃ মনে কর বাহু **জহ** নির্দ্দিষ্ট কোণদ্বয়ের সংলগ্ন।

জহ'র **জ** ও **হ** বিন্দুতে ∠**টজহ**= ∠**গকঘ**,
∠**টহজ**= ∠**ঙখচ** আঁক।

তাহা হইলে △ **টজহ** ইষ্ট △ হইবে।

দ্বিতীয়তঃ, মনে কর নির্দ্দিষ্ট বাহু **টজ** ∠**ঙখচ**'র বিপরীত।

তাহা হইলে **টজ**'র সংলগ্ন অপর ∠**জটহ**
এইরূপে জানা যাইবে। যথা,
গক'র **ক** বিন্দুতে ∠**গকঝ**=**ঙখচ** আঁক,
এবং **ঘক** কে **এ** তে বর্দ্ধিত কর।

তাহা হইলে ∠**ঝকএ** অবশ্যই ত্রিভুজের ৩য় ∠ হইবে,
∵ তাহার তিনটি ∠একত্র=২ সম ∠।

অতএব **টজ**'র সংলগ্ন ∠ হয় জানা গেল,

এবং প্রথম ব্যয়ের প্রক্রিয়া দ্বারা ইষ্ট △ আঁকা যাইবে।

৪। নির্দিষ্ট অবয়বত্রয় দুই বাহু (**কথ, গঘ**) ও তাহাদের একের (**গঘ**'র) বিপরীত কোণ (∠ঙ) হইলে, নিম্নের প্রক্রিয়া অবলম্বনীয়।

থক'র **ক** বিন্দুতে ∠**থকচ** = ∠ঙ আঁক।

থ কে কেন্দ্র ও **গঘ** কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ **চজ** আঁক।

তাহা হইলে △ **কথচ** বা △ **কথজ** ইষ্ট △ হইবে।

যদি **গঘ** < **কথ** ও ∠ঙ < সম ∠ হয়,

তাহা হইলে ইষ্ট △দুইটি বা একটি হইবে, বা একটিও হইবে না,

যদি **গঘ** > = বা < ⊥ **থ** হইতে **কজ**'র উপর।

যদি ∠ ঙ = বা > সম ∠,

তাহা হইলে অবশ্যই **গঘ** > **কথ**,

এবং সে স্থলে একটি মাত্র ইষ্ট △ হইবে।

২। কোণ ও ঋজু রেখা সমদ্বিখণ্ড করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩।

একটি নির্দ্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ড কর।

মনে কর ∠ **খকগ** কে সম দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

কখ তে যে কোন বিন্দু **খ** লইয়া,
ক কে কেন্দ্র ও | **কখ** কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ **খগ** আঁক,
এবং মনে কর ⊙ **খগ**, | **কগ** কে **গ** তে ছেদ করিতেছে।

খ কে কেন্দ্র ও | **খগ** কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ **গঘ** আঁক,
গ কে কেন্দ্র ও | **গখ** কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ **খঘ** আঁক,
মনে কর শেষোক্ত বৃত্তদ্বয় **ঘ**'তে পরস্পরকে ছেদ করিতেছে,
এবং **কঘ**, **খঘ**, **গঘ** যোগ কর।

| **কঘ** ∠ **খকগ** কে সমদ্বিখণ্ড করিতেছে।

কারণ, △ **খকঘ** ও △ **গকঘ** তে
কখ=**কগ**, **কঘ** উভয়েতেই আছে, ও **খঘ**=**খগ**=**গঘ**,
∴ ∠**খকঘ**=∠**গকঘ** (উঃ প্রঃ ১৩)।

টিপ্পনী ১। এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে যে কোন কোণকে ৪, ৮, ১৬ ইত্যাদি সমান ভাগে বিভক্ত করা যায়।

টিপ্পনী ২। **কঘ**'র যে কোন বিন্দু **ঘ** হইতে লম্ব **ঘঙ, ঘচ, কঙ, কচ**'র উপর টানিলে, △**কঘঙ** ও △ **কঘচ** হইতে **ঘঙ** = **ঘচ** (উঃ প্রঃ ১৪)।

অতএব **কঘ**'র যে কোন বিন্দু **কঙ** ও **কচ** হইতে সমদূরবর্ত্তী।

যদি কোন বিন্দু কোন নিয়মাধীনে চলে, তাহা হইলে তাহার চলনে যে ঋজু বা কুটিল রেখা অঙ্কিত হয় তাহাকে সেই বিন্দুর **নিয়ত স্থান** বলে।

অনুমান। যে বিন্দু সম্পাতী ঋজু রেখাদ্বয়ের সমদূরবর্ত্তী তাহার নিয়ত স্থান সেই রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ড কারী ঋজু রেখা।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৪।

একটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখা সমদ্বিখণ্ড কর।

মনে কর | **কখ**কে সমদ্বিখণ্ড করিতে হইবে।
ককে কেন্দ্র ও **কখ**কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া ⊙ **গখঘ** আঁক,
খকে কেন্দ্র ও **খক**কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া ⊙ **গকঘ** আঁক,
এবং ⊙ দ্বয়ের ছেদ বিন্দুদ্বয় **গ**, **ঘ**, যোগ কর।
কখ'র সহিত **গঘ**'র সম্পাত বিন্দু **ঙ**তে **কখ** সমদ্বিখণ্ড হইবে।
কারণ **কগ**, **কঘ**, **খগ**, **খঘ** যোগ করিলে দেখা যায়,

△ **কগঘ** ও △**খগঘ** তে,
কগ=**কখ**=**খগ**, **গঘ** উভয় △ এতে আছে
এবং **কঘ**=**কখ**=**খঘ**,
∴ ∠**কগঘ**=∠**খগঘ** (উঃ প্রঃ ১৩)।
আবার, △ **কগঙ** ও △ **খগঙ**তে,
কগ=**খগ**, **গঙ** উভয় △ এতে আছে, এবং
∠**কগঙ**=∠**খগঙ**,
∴ **কঙ**=**খঙ** (উঃ প্রঃ ১২)।

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে যে কোন ঋজু রেখাকে ৪, ৮, ১৬ ইত্যাদি সমান ভাগে বিভক্ত করা যাইতে পারে।

৩। সমান্তর ও লম্ব ঋজুরেখা অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৫।

একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখার সমান্তর ঋজুরেখা অঙ্কিত কর।

মনে কর **ক** বিন্দু দিয়া | **খগ**'র ॥ ঋঃ রেঃ টানিতে হইবে।

খগতে যে কোন এক বিন্দু **ঘ** লইয়া **ঘক** যোগ কর,

এবং　　∠**ঘকঙ** = ∠**কঘগ** অঙ্কিত কর (সঃ প্রঃ ২)।

তাহা হইলে　　**কঙ** ॥ **খগ**।

কারণ, ∵　∠**ঘকঙ** = ∠**কঘগ**,

∴　　**কঙ** ॥ **খগ** (উঃ প্রঃ ৫)।

টিপ্পনী। ব্যবহারে সচরাচর মাটামের সাহায্যে সমান্তর টানা যায়। যথা **চঘঘ** ও **চ´ঘ´ক** এই দুই স্থানে মাটাম ধরিলে, ∠ **চ´কঘ** = ∠ **চঘঘ**, সুতরাং **কচ´** ॥ **খগ**।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৬।

একটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখাতে বা তাহার বাহিরে স্থিত একটি বিন্দু হইতে তদুপরি লম্ব টান।

(১) (২)

১। মনে কর | **কখ**তে স্থিত **গ** বিন্দু হইতে **কখ**'র উপর ⊥ টানিতে হইবে।

গক=**গঘ** করিয়া লইয়া,

তাহার উপর সমবাহু △ **কঙঘ** অঙ্কিত কর (সঃ প্রঃ ১),

এবং **ঙগ** যোগ কর।

ঙগ ⊥ **কখ** হইবে।

কারণ △ **কগঙ** ও △ **ঘগঙ**তে,

কগ=**ঘগ**, **গঙ** উভয় △ এতে আছে, এবং **কঙ**=**ঘঙ**,

∴ ∠**কগঙ**=∠**ঘগঙ** (উঃ প্রঃ ১৩)=সম∠।

২। মনে কর | **কখ**'র বাহিরে স্থিত **গ** বিন্দু হইতে **কখ**'র উপর ⊥ টানিতে হইবে।

কখ'র অপর দিকে যে কোন বিন্দু **ঘ** লইয়া,

গকে কেন্দ্র ও **গঘ**কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ **ঙঘচ** আঁক,

এবং মনে কর তাহার সহিত | **কখ**'র ছেদবিন্দু **ঙ** ও **চ**।

| **ঙচ**কে **জ**তে সমদ্বিখণ্ড কর (সঃ প্রঃ ৪),

এবং **গজ**, **গঙ**, **গচ** যোগ কর।

তাহা হইলে **গজ** ⊥ **কখ**।

কারণ, △ **গজঙ** ও △ **গজচ**তে,

জঙ=**জচ**, **জগ** উভয় △ এতে আছে, এবং **গঙ**=**গচ**,

∴ ∠ **গজঙ** = ∠**গজচ** (উঃ প্রঃ ১৩)=সম ∠ ।

অনুমান ১। প্রথম চিত্রে **গঙ** স্থিত প্রত্যেক বিন্দু, **ক** ও **খ** হইতে সমদূরবর্ত্তী। অর্থাৎ যে কোন বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্ত্তী বিন্দুর নিয়ত স্থান, সেই বিন্দুদ্বয়ের যোজক ঋজুরেখার মধ্যবিন্দু হইতে তদুপরি লম্ব।

অনুমান ২। এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে যে কোন নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখা **কখ**'র উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে পারা যায়।

কখ'র উপর ⊥ **কগ** টান, **কগ**=**কখ** করিয়া লও, **খঘ** ‖ **কগ** এবং **গঘ** ‖ **কখ** টান।

তাহা হইলে **কখঘগ** বর্গক্ষেত্র হইবে।

৪। ঋজু রেখা সমান ভাগে বিভক্ত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৭।

একটি নির্দিষ্ট ঋজু রেখা নির্দিষ্ট সংখ্যক সমান ভাগে বিভক্ত কর।

মনে কর | **কখ**কে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

ক হইতে আর একটি যে কোন | **কঙ** টান,

কগ = **গঘ** = **ঘঙ** করিয়া লও, **খঙ** যোগ কর,

এবং **গচ** ও **ঘজ** ॥ **ঙখ** টান।

তাহা হইলে | **কখ**, **চ** ও **জ**তে সমান তিন খণ্ডে বিভক্ত হইবে।

কারণ ∵ **চগ** ॥ **জঘ** ॥ **খঙ**,

এবং **কগ** = **গঘ** = **ঘঙ**,

∴ **কচ** = **চজ** = **জখ**, (উঃ প্রঃ ১৭, অনুঃ ৩)।

অনুমান ১। কোন ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে ভূমির সমান্তর ঋজুরেখা টানিলে তাহা অপর বাহুকে সমদ্বিখণ্ড করিবে।

এবং পরিবৃত্তক্রমে, ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্য বিন্দুদ্বয়ের যোজক ভূমির সমান্তর হইবে।

এই অনুমানের প্রথম কথাটির সত্যতা এই প্রতিজ্ঞাব প্রমাণেই প্রতিপন্ন।

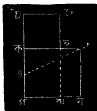
দ্বিতীয় কথাটি সপ্রমাণ করণার্থে,
মনে কর **গ** ও **চ**, **কঘ** ও **কজ**'র মধ্য বিন্দুদ্বয়।
তাহা হইলে **চগ** ॥ **জঘ**।

যদি না হয়, মনে কর **চগ´** ॥ **জঘ**।
তাহা হইলে **কগ´**=½**কঘ**=**কগ**,
অতএব **গ** ও **গ´** ভিন্ন হইতে পারে না।

অনুমান ২। যদি **হ**, **জঘ**'র মধ্যবিন্দু হয়, তাহা হইলে
কচহগ, **জচগহ**, ও **ঘগচহ** সামান্তরিক, এবং
চগ=½**জঘ**, **চহ**=½**ঘক**, ও **হগ**=½**কজ**।

৫। নির্দ্দিষ্ট ক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্র, সামান্তরিক, ও ত্রিভুজ অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৮।

একটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখাকে এরূপে বিভক্ত কর যে সমস্ত রেখা ও তাহার একাংশের অন্তর্গত আয়ত অপর অংশের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমান হইবে।

মনে কর ঋঃ রেঃ **কখ**কে এরূপে বিভক্ত করিতে হইবে যে, **কখ** ও তাহার একাংশের অন্তর্গত আয়ত = অপর অংশের উপরিস্থ বঃ ক্ষেঃ।

কখ'র উপর **কগঘখ** বঃ ক্ষেঃ আঁক (সঃ প্রঃ ৬, অনুঃ ২),
কগকে **ঙ**তে সমদ্বিখণ্ড কর (সঃ প্রঃ ৪), **খঙ** যোগ কর,
ঙক বর্দ্ধিত করিয়া **ঙচ**=**ঙখ** করিয়া লও,
কচ'র উপর **কচজহ** বঃ ক্ষেঃ আঁক, এবং **জহ**কে **ঝ** পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

তাহা হইলে **হ** ইষ্ট বিভাগ বিন্দু হইবে।

কারণ ∵ **গক**, **ঙ**তে সমান দ্বিখণ্ডে বিভক্ত, ও **চ**তে বর্দ্ধিত, হইয়াছে,

∴ আয়ত **গচ**.**চক** + **কঙ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ

= **ঙচ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ (উঃ প্রঃ ২৬)

= **ঙখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ

= **কখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ + **কঙ**'র বঃ ক্ষেঃ (উঃ প্রঃ ২১)।

এবং উভয় দিক হইতে **কঙ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ বাদ দিলে,

আয়ত **গচ·চক**=**কখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ,

অর্থাৎ আয়ত **চগঝজ**=বঃ ক্ষেত্র **কখঘগ**।

এবং উভয় দিক হইতে আয়ত **কগঝহ** বাদ দিলে,

বঃ ক্ষেঃ **কহজচ**=আয়ত **হঝঘখ**।

অর্থাৎ **কহ**'র উপরের বঃ ক্ষেঃ=আয়ত **কখ·খহ**।

টিপ্পনী। বীজগণিত অনুসারে এই সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা এইরূপে সম্পাদিত হইবে।

মনে কর **কখ**=অ,

এবং একটি নির্ণেয় অংশ=স,

তাহা হইলে অপর অংশ=অ−স,

এবং　　$স^২=অ(অ-স)$।

$\therefore স^২+অস-অ^২=০$,

$\therefore \quad স=\frac{-অ\pm\sqrt{৫অ^২}}{২}$

$=\frac{\sqrt{৫}}{২}অ-\frac{১}{২}অ$ (+ চিহ্ন লইলে)

উপরের চিত্রের সহিত স'র এই মান মিলাইয়া দেখা যাউক।

$ঙখ^২=কখ^২+কঙ^২=কখ^২+\frac{১}{৪}কখ^২$

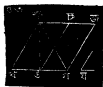
$=\frac{৫}{৪}কখ^২$,

$\therefore ঙখ=ঙচ=\frac{\sqrt{৫}}{২}কখ$;

এবং $কহ=কচ=ঙচ-ঙক=\frac{\sqrt{৫}}{২}কখ-\frac{১}{২}কখ$।

অতএব বীজগণিতের সম্পাদন প্রণালী হইতে জ্যামিতির সম্পাদন প্রণালীর স্পষ্ট আভাস পাওয়া যায়।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৯।

একটি নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং একটি নির্দ্দিষ্ট কোণ বিশিষ্ট সামান্তরিক অঙ্কিত কর।

মনে কর △ **কখগ**'ব সমান এবং
∠**ঘ**'র সমান কোণ বিশিষ্ট ▱ আঁকিতে হইবে।
খগ কে **ঙ** তে সমদ্বিখণ্ড কব (সঃ প্রঃ ৪),
∠**গঙচ**=∠**ঘ** অঙ্কিত কব, (সঃ প্রঃ ২),
গজ ॥ **ঙচ**, **কজ** ॥ **ঙগ** টান,
এবং মনে কর **কজ** ও **ঙচ**'ব ছেদ বিন্দু **চ**।
তাহা হইলে **চঙ গজ** ইষ্ট সামান্তবিক হইবে।

কারণ, ∵ **খঙ**=**ঙগ**, ∴ △ **কঙখ**=△**কঙগ**,
এবং ∴ △ **কখগ**=২×△**কঙগ**= ▱ **চঙগজ**।
এবং ∠**চঙগ**=∠**ঘ**।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—১০।

যে কোন নির্দ্দিষ্ট ঋজু রৈখিক ক্ষেত্রের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

মনে কর ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র **কখগঘঙচ**'র সমান একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে,

যাহার ভূমি **গঘ** রেখায় মিলিত, ও তদ্বিপরীত কোণ **ক** হইবে।

ক হইতে ভিন্ন ভিন্ন কোণে | টানিয়া

ক্ষেত্রটিকে ভিন্ন ভিন্ন ত্রিভুজে বিভক্ত কর।

এবং **খজ** ‖ **কগ**, **চহ** ‖ **কঙ**, **হঝ** ‖ **কঘ** টান,

ও বর্দ্ধিত করিয়া যথাক্রমে **ঘগ**, **ঘঙ**, **গঘ**'র সহিত **জ**, **হ**, **ঝ**'তে মিলাও।

এবং **কজ**, **কহ**, **কঝ** যোগ কর।

তাহা হইলে △ **কজঝ** ইষ্ট △ হইবে।

কারণ, ∵ **খজ** ‖ **কগ**,　△**কখগ**=△**কজগ**,

∵ **চহ** ‖ **কঙ**, ∴ △**কঙচ**=△**কঙহ**,

এবং　∵ **হঝ** ‖ **কঘ**, ∴ △**কহঘ**=△**কঝঘ**।

∴ △ **কজঝ**=△**কজগ**+△**কগঘ**+△**কঝঘ**

=△**কখগ**+△**কগঘ**+△**কহঘ**

=△**কখগ**+△**কগঘ**+△**কঘঙ**+△**কঙহ**

=△**কখগ**+△**কগঘ**+△**কঘঙ**+△**কঙচ**

=ক্ষেত্র **কখগঘঙচ**।

অনুমান। এই প্রতিজ্ঞা ও ৯ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার সাহায্যে যে কোন নির্দ্দিষ্ট রৈখিক ক্ষেত্রের সমান আয়ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—১১।

যে কোন নির্দ্দিষ্ট ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের সমান বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

মনে কর ঋজু রৈখিক ক্ষেত্র **র**'র সমান একটি বঃ ক্ষেঃ আঁকিতে হইবে।

র'র সমান আয়ত **কখগঘ** আঁক (সঃ প্রঃ ১০, অনুঃ)।

কখ বর্দ্ধিত করিয়া **খঙ** = **খগ** করিয়া লও।

কঙ কে **চ** তে সমদ্বিখণ্ড করিয়া

চ'কে কেন্দ্র ও **চঙ** কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ **ঙজক** আঁক।

গখ কে বর্দ্ধিত করিয়া সেই ⊙ সহ **জ** তে মিলিত কর, ও **চজ** যোগ কর।

তাহা হইলে **খজ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ ইষ্ট বঃ ক্ষেঃ হইবে।

কারণ, ∵ **কঙ**, **চ**'তে সমদ্বিখণ্ডে ও **খ**'তে বিষম দ্বিখণ্ডে বিভক্ত,

∴ আয়ত **কখ.খঙ** + **চখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ

= **চঙ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ

= **চজ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ

= **খজ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ + **চখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ।

∴ উভয় দিক হইতে **চখ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ বাদ দিলে,

আয়ত **কখ.খঙ** = **খজ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ।

কিন্তু আয়ত **কখ.ঙখ** = আয়ত **কখ.খগ**

= ক্ষেত্র **র**,

∴ **খজ**'র উপর বঃ ক্ষেঃ = ক্ষেত্র **র**।

অনুমান। বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দু হইতে ব্যাসের উপর লম্ব টানিলে, লম্বের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র, লম্বদ্বারা বিভক্ত ব্যাসের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞার একটু বিভিন্নরূপে সম্পাদন প্রণালী প্রাচীন কালে হিন্দুরা জানিতেন। বঙ্গের এসিয়াটিক সোসাইটির পত্রিকা, ৪৪ সংখ্যা, ২৪৫ পৃষ্ঠা দ্রষ্টব্য।

৬। একটি বিশেষ প্রকার সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—১২।

এরূপ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার ভুমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি তৃতীয় কোণের দ্বিগুণ হইবে।

একটি । **কখ** লইয়া তাহাকে **ঘ**'তে এরূপে ভাগ কর যে
কখ·খঘ=কঘ^{২} (সঃ প্রঃ ৮),
খঘ'কে **ঙ**তে সমদ্বিখণ্ড কর, **ঙগ** ⊥ **কখ** টান,
ঘ'কে কেন্দ্র ও **ঘক**কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ **কগ** আঁক,
এবং মনে কর ঐ ⊙ **ঙগ**কে **গ**তে ছেদ করিতেছে।

গক, গখ, গঘ যোগ কর।

তাহা হইলে △ **কখগ** ইষ্ট △ হইবে।

কারণ, **কগ**^{২} = **কঘ**^{২} + **গঘ**^{২} + ২**কঘ ঙঘ** (উঃ প্রঃ ২৩)
= **কঘ**^{২} + **কঘ**^{২} + **কঘ·খঘ** (∵ **গঘ=কঘ, খঘ** = ২**ঙঘ**)
= **কঘ**^{২} + **কখ·কঘ** (উঃ প্রঃ ২৪, টিঃ ৩)
= **কখ·খঘ** + **কখ কঘ** (∵ **কঘ**^{২} = **কখ·খঘ**)
= **কখ**^{২} (উঃ প্রঃ ২০, টিঃ ৩)।

∴ **কগ=কখ** এবং ∴ △ **কখগ** সমদ্বিবাহু।

এবং ∠ **খ**=∠**ঙঘগ** (∵ △ **গখঙ**, △ **গঘঙ** সর্ব্বাংশে সমান)

=∠**ক**+∠**কগঘ**=∠**ক**+∠**ক** (∵ **গঘ=কঘ**)।

=২×∠**ক**।

অনুমান। এই প্রতিজ্ঞাব সাহায্যে সমকোণ কে **পাঁচ ভাগে বিভক্ত করা যায়।**

কারণ ∠**ক**+∠**খ**+∠**খগক**=৫×∠**ক**

=২ সম ∠,

∴ ∠**ক**=$\frac{১}{৫}$×২ সম ∠,

এবং ∴ $\frac{১}{২}$∠**ক**=$\frac{১}{৫}$ সমকোণ।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ।

অনুশীলনার্থ উদাহরণ।

উপক্রমণিকা। জ্যামিতির প্রশ্নসমাধান বীজগণিতের প্রশ্নসমাধান অপেক্ষা কিঞ্চিৎ কঠিন, কারণ জ্যামিতির প্রশ্নসমাধানপ্রক্রিয়া বীজগণিতের প্রশ্নসমাধানপ্রক্রিয়ার ন্যায় নির্দ্দিষ্ট নিয়মাধীন নহে। জ্যামিতির প্রশ্নসমাধানে নৈপুণ্যলাভ কেবল অভ্যাসের ফল।

জ্যামিতির প্রশ্নসমাধানার্থে সাধারণ নিয়ম স্বরূপে যাহা বলা যাইতে পারে তাহা এই।—

প্রশ্নটি উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা হইলে, মনে কর তাহার সত্যতা সপ্রমাণ হইয়াছে, অথবা তাহা সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা হইলে, মনে কর তাহা সম্পাদিত হইয়াছে। তদনন্তর প্রশ্ন সম্বন্ধীয় চিত্রের প্রতি লক্ষ্য করিয়া দেখ, যে তত্ত্বটি সপ্রমাণ করিতে হইবে তাহার সত্যতা মানিয়া লইলে ক্রমান্বয়ে কোন্ কোন্ পরিজ্ঞাত তত্ত্বে উপনীত হওয়া যায়, অথবা যে অঙ্কন কার্য্যটি সম্পাদন করিতে হইবে তাহা সম্পাদিত হইয়াছে বলিয়া স্বীকার করিলে ক্রমান্বয়ে কোন্ কোন্ পরিজ্ঞাত বিন্দু বা রেখাতে উপনীত হওয়া যায়। এবং পরিশেষে দেখ সেই সেই পরিজ্ঞাত তত্ত্ব অথবা বিন্দু রেখাদি হইতে বিপরীতক্রমে কিরূপে সেই উপপাদ্য তত্ত্বে অথবা সম্পাদ্য অঙ্কনে উপনীত হওয়া যায়।

এ সম্বন্ধে গণিতবেত্তা প্রকটর্ তাঁহার কৃত "জ্যামিতির প্রথম সোপান" নামক গ্রন্থে বলিয়াছেন, "জ্যামিতির বিশেষ বিশেষ প্রশ্নসমাধানের প্রক্রিয়া জানা অপেক্ষা, কি প্রণালীতে চলিলে সাধারণতঃ জ্যামিতির প্রশ্নসমাধানের সহায়তা হয় তাহা জানাই গণিত বিদ্যার্থীর অধিকতর উপযোগী।"

বিশেষ প্রয়োজনীয় তত্ত্বমূলক কয়েকটি উদাহরণ নিম্নে উপপন্ন বা সম্পাদিত করা হইল। এবং আর কয়েকটি উদাহরণ বিদ্যার্থী উপপন্ন বা সম্পাদিত করিবেন বলিয়া দেওয়া গেল।

উপপন্ন বা সম্পাদিত উদাহরণ।

১। যদি | **কখ**'র মধ্যবিন্দু **গ** ও সীমাবিন্দু **খ** হইতে সমান্তর | **গঘ** ও **খঙ** টানা যায়, এবং **গঘ**=½ **খঙ** হয়,
তবে **ক**, **ঘ**, **ঙ**, একরেখাস্থ বিন্দু হইবে।

কারণ, যদি **কঙ** যোগ করাযায় এবং মনে করা যায় **কঙ** ও **গঘ**'র সম্পাত বিন্দু **চ**, তাহা হইলে

কচ=½ **কঙ** (সঃ প্রঃ ৭, অনুঃ ১),
এবং **গচ**=½ **খঙ**　(ঐ, অনুঃ ২)।
কিন্তু **গঘ**=½ **খঙ**,
∴ **গঘ**=**গচ** অর্থাৎ **ঘ** ও **চ** ভিন্ন নহে।

২। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু ও তদ্‌বিপরীত কোণের যোজক ঋজু রেখাত্রয় একবিন্দুমুখী।

মনে কর, **ঘ** ও **ঙ**, **কখ** ও **কগ**'র মধ্যবিন্দু, **জ**, **গঘ** ও **খঙ**'র সম্পাতবিন্দু, এবং **কজ** বৰ্দ্ধিত হইয়া **চ**'তে **খগ**কে ছেদ করিতেছে। তাহা হইলে যদি **চ**, **খগ**'র মধ্যবিন্দু হয় তবে এই প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করা হইবে।

মনে কর **খহ** ও **গব**, **কচ**'র উপর ⊥।

তাহা হইলে, ∵ **কঘ**=**খঘ**, ∴ △ **কঘগ** = △ **খঘগ**,
ও △ **কঘজ**= △ **খঘজ**।

এবং সমান হইতে সমান বাদ দিলে,

△ **কজগ**= △ **খজগ**।
এবং সেইরূপে　△ **কজখ**= △ **খজগ**।
∴　△ **কজগ**= △ **কজখ**।

তাহা হইলে △কগুচ ও △ জগুঘ হইতে
∠গুকচ = ∠গুজঘ, এবং কচ = জঘ (উঃ প্রঃ ১২)।
কিন্তু ∠কঘচ > ∠কচঘ, ∴ কচ > কঘ,
∴ জঘ > কঘ,
এবং ∴ ∠ঘকগু > ∠গুজঘ > ∠গুকচ।

টিপ্পনী। যদি এক সারিতে খ, ঘ, গু, চ, গতে কতকগুলি সমদূরস্থিত আলোকের স্তম্ভ থাকে, কতে দণ্ডায়মান দর্শকের চক্ষুতে তাহারা ক্রমশঃ পরস্পরের নিকটবর্ত্তী হইয়া আসিতেছে বলিয়া বোধ হয়। ∠খকগ'র খণ্ডগুলি ক্রমে ছোট হইয়া আসাই বোধ হয় তাহার কারণ।

৭। একটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখাতে এমন একটি বিন্দু নির্ণীত কর, যাহাতে সেই রেখার এক পার্শ্বস্থিত দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঋজুরেখা টানিলে তাহাদের সহিত প্রথমোক্ত রেখার কোণদ্বয় সমান হইবে।

নির্দ্দিষ্ট বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে কোন একটি, গ, হইতে নির্দ্দিষ্ট। কখ'র উপর গগু⊥ টান, গুচ = গগু করিয়া লও, এবং অপর নির্দ্দিষ্ট বিন্দু ঘ এবং চ যোগ কর। তাহা হইলে ঘচ ও কখ'র সম্পাতবিন্দু জ ইষ্ট বিন্দু হইবে।

কারণ, △ গগুজ △ ও △ চগুজ হইতে
∠ গজগু = ∠চজগু (উঃ প্রঃ ১২)
= ∠ঘজখ (উঃ প্রঃ ৩)।

যদি কখ তে আর কোন বিন্দু হ লওয়া যায়,
গহ + ঘহ = চহ + ঘহ > ঘচ (উঃ প্রঃ ১১)
> ঘজ + জচ
> ঘজ + গজ।

অতএব গ ও ঘ হইতে জ'র দূরত্বের সমষ্টি লঘিষ্ঠ মান।

৮। ত্রিভুজের ভূমি, তৎসংলগ্ন একটি কোণ, ও উচ্চতা নির্দ্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

মনে কর **কখ** নির্দ্দিষ্ট ভূমি,
∠**গ** · কোণ,
| **ঘ** উচ্চতা।

∠**খকঙ**=∠**গ** আঁক, **কচ**⊥**কখ** এবং= | **ঘ** টান, **চজ** ‖ **কখ** টান, এবং **কঙ** ও **চজ**'র সম্পাতবিন্দু **জ** হইতে **জখ** টান। তাহা হইলে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে △ **কখজ** ইষ্ট △ হইবে।

টিপ্পনী। ইষ্ট ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ যখন = ∠**গ** হইবে, তখন ভূমির বিপরীত কোণ অবশ্যই | **কঙ** তে থাকিবে। এবং ত্রিভুজের উচ্চতা যখন = | **ঘ** হইবে, তখন ভূমির বিপরীত কোণ অবশ্যই | **চজ**'তে থাকিবে। অতএব ভূমির বিপরীত কোণ যখন **কচ** ও **চজ** উভয় রেখাতেই থাকিবে, তখন তাহা অবশ্যই ঐ রেখাদ্বয়ের সম্পাতবিন্দু হইবে।

কখ'র উপর ∠ **খকজ** বিশিষ্ট যত ত্রিভুজ থাকিতে পারে তাহাদের ভূমির বিপরীত কোণ বিন্দুর নিয়তস্থান | **কঙ**। এবং **কখ**'র উপর | **কচ** পরিমাণ উচ্চতা বিশিষ্ট যত △ থাকিতে পারে তাহাদের ভূমির বিপরীত কোণ বিন্দুর নিয়তস্থান | **চজ**।

সুতরাং ইষ্ট ত্রিভুজের ভূমির বিপরীত কোণ বিন্দু অবশ্যই এই নিয়তস্থান রেখাদ্বয়ের সম্পাতবিন্দু।

এইরূপে নিয়তস্থান রেখাদ্বয়ের সম্পাত বিন্দু লইয়া অনেক সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার সম্পাদন হইতে পারে।

৯। ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা, ও একটি বাহু নির্দ্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

মনে কর
ভূমি = **কখ**
উচ্চতা = **ঘ**
বাহু = **ঙ**।

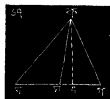
কচ⊥**কখ** এবং= | **ঘ** টান, **চজ** ‖ **কখ** টান, এবং **ক**কে কেন্দ্র ও **ঙ** কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ আঁক। সেই ⊙এর ও | **চজ**'র ছেদ বিন্দু **জ** ত্রিভুজের ভূমির বিপরীত কোণ বিন্দু হইবে, এবং △ **কজখ** ইষ্ট △ হইবে।

১০। যদি **খঙ** ও **গঙ** ∠ **কখগ** ও ∠ **কগঘ**'র সমদ্বিখণ্ডকারী হয়, তাহা হইলে ∠ **ঙ**= ½ ∠**ক**।

কারণ, ∠ **ঙ** + ∠ **ঙখগ** = ∠ **ঙগঘ** (উঃ প্রঃ ৮, অনুঃ ২)
= ½ ∠ **কগঘ**
= ½ ∠ **ক**+½∠**কখগ**
= ½ ∠ **ক**+ ∠**ঙখগ**।
∴ ∠ **ঙ** = ½ ∠ **ক**।

১১। যে কোন ত্রিভুজ **কখগ**তে যদি **ঘ**, **খগ**'র মধ্যবিন্দু হয়, তবে **কখ**² + **কগ**² = ২**কঘ**² + ২**খঘ**²।

কারণ **কঙ** ⊥ **খগ** টানিলে,
দেখা যাইতেছে,

কখ² = **কঘ**² + **খঘ**² + ২**খঘ**·**ঘঙ**,
কগ² = **কঘ**² + **গঘ**² − ২**গঘ**·**ঘঙ**
(উঃ প্রঃ ২৩)

এবং **গঘ** = **খঘ**।

∴ **কখ**² + **কগ**² = ২**কঘ**² + ২**খঘ**²।

১২। যদি **খগ** (শেষ চিত্র দেখ) **ঘ**তে সমদ্বিখণ্ডে, ও **ঙ**তে বিষম দ্বিখণ্ডে, বিভক্ত হয়,

খঙ^২ + গঙ^২ = খগ^২ − ২খঙ·গঙ (উঃ প্রঃ ২৪)
= ৪খঘ^২ − ২খঙ·গঙ (উঃ প্রঃ ২৪, অনুঃ ১)
= ২খঘ^২ + ২খঘ^২ − ২খঙ·গঙ
= ২খঘ^২ + ২ঘঙ^২ (উঃ প্রঃ ২৫)।

১৩। যে কোন ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর, তাহার শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ও শীর্ষকোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব এই রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ।

মনে কর **কঘ**, ∠ **খকগ**'র সমদ্বিখণ্ডকারী, ও **কঙ** ⊥ **খগ**।

তাহা হইলে ∠ **গ** + ∠ **গকঙ** = সম ∠
= ∠**খ** + ∠**খকঙ**।

∴ ∠**গ** − ∠**খ** = ∠**খকঙ** − ∠**গকঙ**
= ∠**খকঘ** + ∠**ঘকঙ** − ∠**গকঙ**
= ∠**গকঘ** + ∠**ঘকঙ** − ∠**গকঙ**
= ∠**গকঙ** + ∠**ঘকঙ** + ∠**ঘকঙ** − ∠**গকঙ**
= ২∠**ঘকঙ**।

১৪। একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ ও বাহুর অন্তর নির্দিষ্ট আছে। বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

মনে কর **কঘঙচ** ইষ্ট বর্গক্ষেত্র, এবং **কখ** তাহার কর্ণ ও বাহুর নির্দিষ্ট অন্তর।

খগ ⊥ **কখ** টান। তাহা হইলে, ∵ ঘঙ, = **কঘ**,

∴ ∠**গকঙ** = ½ সম ∠
= ∠**কগখ**।

∴ **খগ** = **কখ**।

আবার ∵ **ঙঘ=ঙখ,**

∴ ∠**ঙখঘ**=∠**ঙঘখ,**

এবং ∠**ঙঘক**=সম ∠=∠ **ঙখগ,**

∴ ∠**গখঘ**=∠**গঘখ,**

এবং ∴ **ঘগ=খগ=কখ।**

অতএব ইষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহু **কঘ** এইরূপে জানা যায়।—

খগ ⊥ **কখ** এবং=**কখ** টান।

কগ যোগ কর, এবং বর্দ্ধিত করিয়া **গঘ=গখ** করিয়া লও।

টিপ্পনী। এইরূপে সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা সম্পাদিত হইয়াছে মনে করিয়া কতদূর কি পাওয়া যায়, অর্থাৎ কোন্ কোন্ রেখার বা কোণের কাহার সহিত সাম্য পাওয়া যায়, তৎপ্রতি লক্ষ্য করিলে, অনেক স্থলে প্রতিজ্ঞা সম্পাদনের যথেষ্ট সহায়তা পাওয়া যায়।

১৫। একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ ও বাহুর সমষ্টি নির্দ্দিষ্ট আছে। ক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

মনে কর **কগঘঙ** ইষ্ট বর্গক্ষেত্র, এবং **কখ** তাহার কর্ণ ও বাহুর সমষ্টি।

তাহা হইলে

∠ **খকগ**=½ সম ∠,

∠ **খ** =¼ সম ∠,

∵ **ঘখ** =**ঘগ**, এবং ∠ **কঘগ**=∠**খ**+∠**খগঘ**

=২∠**খ**।

অতএব এ প্রতিজ্ঞা এইরূপে সম্পাদিত হইতে পারে। যথা—

কতে ∠ **খকগ**=½ সম ∠,

ও **খ**তে ∠ **কখগ**=¼ সম ∠, অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে **গ** নির্ণীত হইবে।

এবং **গঘ** ⊥ **গক** টান, ও মনে কর

গঘ ও **কখ**'র সম্পাত বিন্দু **ঘ**।

তাহা হইলেই স্পষ্ট দেখা যাইতেছে **কগ=গঘ**=ইষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহু।

অনুশীলনার্থ উদাহরণমালা।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৩ দ্রষ্টব্য।)

১। একটি ঋজুরেখার আব একটি ঋজুরেখার সহিত যে সন্নিহিত কোণদ্বয় হয়, তাহাদের সমদ্বিখণ্ডকারিদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

২। দুই ঋজুবেখাব পরস্পর সম্পাতে যে চারিটি কোণ হয় তাহাদেব মধ্যে বিপরীত কোণদ্বয়েব সমদ্বিখণ্ডকারিদ্বয় একই ঋজুবেখাতে থাকিবে।

৩। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১এব ২য় চিত্রে যদি ∠ **কওগ**=৬০° হয়, তবে ∠ **খওগ** ও ∠ **গওঙ**তে কত কত ডিগ্রি আছে?

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৭ দ্রষ্টব্য।)

৪। যদি দুটি সম্পাতী ঋজুবেখাব উপব আব একটি ঋজুরেখা পতিত হয়, তাহা হইলে তাহাব প্রত্যেক পার্শ্বেরই অন্তবস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি ও দুই সমকোণের প্রভেদ প্রথমোক্ত রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণেব সমান।

৫। যদি দুটি সমান্তর ঋজুবেখার উপব আর একটি ঋজুরেখা পতিত হয়, তাহা হইলে তাহার প্রত্যেক পার্শ্বেরই বাহিরেব কোণদ্বয়েব সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

৬। যদি দুটি ঋজুরেখা যথাক্রমে আব দুটি ঋজুবেখার সমান্তর হয়, এবং প্রথমোক্ত বেখাদ্বয়ের একটি দ্বিতীয়োক্ত রেখাদ্বয়ের একটিকে ছেদ কবে, তাহা হইলে রেখা চতুষ্টয়ের অপব দুটি পবস্পর ছেদ করিবে।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৮ দ্রষ্টব্য।)

৭। ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা তাহার ভূমির সহিত যে কোণদ্বয় উৎপন্ন করে, তাহাদের প্রভেদ ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের প্রভেদের সমান।

৮। ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকারী রেখার অন্তর্গত কোণ ত্রিভুজের শীর্ষকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর, এবং শীর্ষকোণ অপেক্ষা তাহার আধিক্য ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টির অর্দ্ধেক।

৯। সমানকোণী সমবাহু পঞ্চভুজের কোণে কত ডিগ্রি আছে, এবং ঐরূপ ষড়্ভুজের কোণেই বা কত ডিগ্রি আছে ?

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—১১ দ্রষ্টব্য।)

১০। কেবল ৮ ও ৯ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সপ্রমাণ কর যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা তাহার ভূমির উপব লম্ব।

১১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজেব ভূমিব সহিত সমান্তর ঋজুরেখা সেই ত্রিভুজেব যে ত্রিভুজ খণ্ড বিচ্ছিন্ন কবে তাহা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

১২। সমবাহু ত্রিভুজের যে কোন বাহুব সমান্তর ঋজুরেখা সেই ত্রিভুজের যে ত্রিভুজখণ্ড বিচ্ছিন্ন করে তাহা সমবাহু ত্রিভুজ।

১৩। যে কোন ত্রিভুজের কোন এক বাহুব সীমাদ্বয় হইতে ত্রিভুজেব মধ্যে যে কোন বিন্দুতে যদি চুটি ঋজুবেখা টানা যায়, তাহা হইলে সেই রেখাদ্বয়েব সমষ্টি ত্রিভুজেব অপব বাহুদ্বয়েব সমষ্টি অপেক্ষা ছোট হইবে, কিন্তু তাহাদেব অন্তর্গত কোণ ত্রিভুজের সেই বাহুদ্বয়েব অন্তর্গত কোণ অপেক্ষা বড় হইবে।

১৪। যদি চুটি বহুভুজ যাহাদের কোন বিরূপ কোণ নাই, একই ভূমিব একই পার্শ্বে এমত ভাবে থাকে যে একটি অপরটিব সম্পূর্ণ অন্তর্গত, তাহা হইলে প্রথমটিব বাহু সমষ্টি দ্বিতীয়টিব বাহু সমষ্টি অপেক্ষা ন্যূন হইবে।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—১৫ দ্রষ্টব্য।

১৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণেব সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা সেই ত্রিভুজকে চুটি সর্ব্বাংশে সমান ত্রিভুজে বিভক্ত কবে।

১৬। যদি চুটি ঋজুরেখা পরস্পবকে সমদ্বিখণ্ডে বিভক্ত কবে, তাহা হইলে তাহাদের সীমাবিন্দু চতুষ্টয়েব যোগে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

১৭। ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা ভূমিকে যে দুই খণ্ডে বিভক্ত করে, তন্মধ্যে ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতব বাহুর সংলগ্ন খণ্ড অপর খণ্ড অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১৮। যদি কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমি পর্য্যন্ত তিনটি ঋজু রেখা টানা যায়, একটি ভূমির উপর লম্ব, দ্বিতীয়টি শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী, ও তৃতীয়টি ভূমির সমদ্বিখণ্ডকারী, তাহা হইলে তাহারা উপরিউক্তক্রমে একটি অপেক্ষা অপরটি বৃহত্তর।

১৯। যদি কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা তাহার ভূমির উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে সে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

২০। যদি কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডকারী ঋজুরেখা তাহার ভূমিকে সমান দুইখণ্ডে বিভক্ত করে তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—১৭ দ্রষ্টব্য।

২১। আয়তের কর্ণদ্বয় সমান।

২২। যদি কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে সেই সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—২০ দ্রষ্টব্য।)

২৩। একই ভূমির একই পার্শ্বে দুটি সমান সামান্তরিক থাকিলে তাহারা একই সমান্তর রেখার অন্তর্গত।

২৪। একই ভূমির উপর দুটি সমান সামান্তরিক থাকিলে তাহাদের উচ্চতা সমান হইবে।

২৫। কোন সামান্তরিকের কর্ণের যে কোন বিন্দু দিয়া তাহার বাহুদ্বয়ের সমান্তর ঋজুরেখা টানিলে, সেই সামান্তরিক যে চারিটি সামান্তরিকে বিভক্ত হইবে, তন্মধ্যে যে দুটি কর্ণ দ্বারা বিভক্ত নহে তাহারা সমান হইবে।

২৬। একটি সামান্তরিকের ভূমি ৩৬ ইঞ্চ ও ক্ষেত্রফল ৯ বর্গ ফিট। তাহার উচ্চতা কত?

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—২৩ দ্রষ্টব্য।)

২৭। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র তাহার বাহু ও তদুপরি ভূমির প্রক্ষেপণী এই দুই ঋজুরেখার অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ।

২৮। যদি একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ২০ ফিট হয়, তবে তাহার বিপরীত কোণ হইতে বাহুর উপর লম্বের পরিমাণ কত ?

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—২৬।

২৯। যে কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের সংলগ্ন কোন একটি বাহুর উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্র তাহার কর্ণ ও অপর বাহুর যোগফল ও বিয়োগ-ফলের অন্তর্গত আয়তের সমান।

৩০। যে কোন ঋজু রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত তাহাদের অর্দ্ধযোগফল ও অর্দ্ধবিয়োগ ফলের উপরিস্থিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের প্রভেদের সমান।

দ্বিতীয় অধ্যায়।

বৃত্ত।

প্রথম পরিচ্ছেদ।

পরিভাষা।

১ বৃত্তের পরিধির যে কোন দুই বিন্দুর মধ্যস্থিত অংশকে **চাপ**, ও ঐ বিন্দুদ্বয়ের যোজককে তাহার **জ্যা** বলে।

২। জ্যা বর্দ্ধিত করিলে তাহাকে **ছেদিনী** বা **খণ্ডিনী** বলে।

৩। যদি কোন ছেদিনী ক্রমশঃ এইরূপে সরিয়া যায় যে, বৃত্তের সহিত তাহার ছেদ বিন্দুদ্বয় ক্রমাগত সন্নিহিত ও পরিশেষে মিলিত হয়, তাহা হইলে ঐ শেষোক্ত স্থানে উপনীত ছেদিনীকে বৃত্তের **স্পর্শিনী** বলে।

অথবা, যদি কোন ঋজু রেখা একটি বৃত্তের সহিত সংলগ্ন হয়, কিন্তু বর্দ্ধিত করিলে তাহাকে ছেদ না করে, তাহা হইলে সেই রেখাকে সেই বৃত্তের **স্পর্শিনী** বলে।

৪। যদি পরস্পর ছেদ কারী বৃত্তদ্বয়ের একটি ক্রমশঃ এইরূপে সরিয়া যায় যে তাহাদের ছেদবিন্দুদ্বয় ক্রমাগত সন্নিহিত ও পরিশেষে মিলিত হয়, তাহা হইলে ঐ শেষোক্ত স্থানে উপনীত দ্বিতীয় বৃত্ত প্রথম বৃত্তকে **স্পর্শ** করিতেছে বলা যায়।

অথবা, যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরের সহিত মিলিত হয়, কিন্তু কেহ অপরকে ছেদ না করে, তাহা হইলে তাহারা পরস্পরকে **স্পর্শ** করিতেছে বলা যায়।

৫। জ্যা ও তদ্দারা বিচ্ছিন্ন বৃত্তের পরিধির অংশদ্বয়ের যে কোন একটি লইয়া যে ক্ষেত্র হয় তাহাকে **বৃত্তখণ্ড** বলে। এবং পরিধির অপর অংশকে প্রথমোক্ত অংশের **সংযোগী** চাপ বলে।

৬। কোন চাপের যে কোন বিন্দু হইতে তাহার সীমাবিন্দুদ্বয় পর্য্যন্ত দুটি ঋজুরেখা টানিলে সেই রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণকে **বৃত্তখণ্ডস্থ** কোণ বলে, ও সেই কোণ সংযোগী চাপের উপর **দণ্ডায়মান** বলা যায়।

৭। দুই ব্যাসার্দ্ধ ও তন্মধ্যস্থিত পরিধিখণ্ড বেষ্টিত ক্ষেত্রকে **বৃত্ত-চ্ছেদক** বলা যায়।

৮। যদি কোন ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের কোণবিন্দুগুলি কোন বৃত্তের পরিধিতে থাকে, তাহা হইলে, সেই ক্ষেত্র, বৃত্তের **অন্তর্রক্ষিত**, ও সেই বৃত্ত, ক্ষেত্রের **বহিরঙ্কিত** বলা যায়।

৯। যদি কোন ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের বাহুগুলি কোন বৃত্তকে স্পর্শ করে, তাহা হইলে, সেই ক্ষেত্র, বৃত্তের **বহিরঙ্কিত**, ও সেই বৃত্ত, ক্ষেত্রের **অন্তরঙ্কিত** বলা যায়।

টিপ্পনী। প্রথম অধ্যায়ে যেরূপ বলা হইয়াছে এ অধ্যায়েও সেইরূপ, বিন্দু, রেখা, কোণ, ও ক্ষেত্র যাহাদের উল্লেখ হইবে, তৎ সমুদয়ই একই সমতল স্থিত বলিয়া মানিয়া লইতে হইবে।

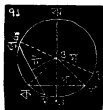
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা।

১। জ্যা ও এক বৃত্তস্থ বিন্দু।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

১। যদি কোন বৃত্তের কেন্দ্রগামী ঋজুরেখা বৃত্তের কেন্দ্রগামী নহে এরূপ কোন জ্যাকে সমদ্বিখণ্ড করে, তাহা হইলে প্রথমোক্ত রেখা সেই জ্যার উপর লম্ব হইবে।

২। পরিবৃত্তক্রমে, কেন্দ্র হইতে যে কোন জ্যার উপর লম্ব সেই জ্যাকে সমদ্বিখণ্ড করিবে।

১। মনে কর **কখ** কেন্দ্রগামী নহে এরূপ জ্যা,
গ তাহার মধ্যবিন্দু, এবং কেন্দ্র **ও** হইতে **ওগ** টানা হইয়াছে।
তাহা হইলে **ওগ** $\perp$ **কখ**।

ওক, ওখ যোগ কর।
তাহা হইলে $\triangle$ **ওগক** এবং $\triangle$ **ওগখ** এতে
কগ=**খগ, ওগ** উভয় $\triangle$ এতে আছে, এবং **ওক**=**ওখ,**
$\therefore$ $\angle$ **ওগক**= $\angle$ **ওগখ** (১, উঃ প্রঃ ১৩) = সম $\angle$।
এবং　**ওগ** $\perp$ **কখ**।

২। মনে কর ওগ ⊥ কখ,

তাহা হইলে কগ = খগ।

কারণ, $গও^২ + গক^২ = ওক^২ = ওখ^২ = গও^২ + গখ^২$,

∴ $গক^২ = গখ^২$ এবং ∴ গক = গখ।

অনুমান ১। বৃত্তের কেবল একমাত্র কেন্দ্র আছে, এবং তাহা যে কোন একটি জ্যার সমদ্বিখণ্ডকারী লম্বের মধ্যবিন্দু, অথবা যে কোন দুইটি জ্যাব সমদ্বিখণ্ডকাবী লম্বদ্বয়ের সম্পাতবিন্দু।

কারণ, যদি সম্ভবপর হয়, মনে কর

ও এবং ঘ উভয়ই ⊙ কহখ'র কেন্দ্র।

ও এবংঘ যোগ কর, এবং ওঘকে বর্দ্ধিত করিয়া

ঙ এবং চ'তে পবিধি পর্য্যন্ত টান।

তাহা হইলে, ওচ=ওঙ= ½ ঙচ,

এবং ঘচ = ঘঙ = ½ ঙচ,

∴ ওচ = ঘচ, যাহা হইতে পারে না।

কেন্দ্র যখন ক এবং খ হইতে সমদূরবর্ত্তী,

তখন তাহা অবশ্যই কখ'র সমদ্বিখণ্ডকাবী লম্বে, অর্থাৎ ঝঞ'তে স্থিত, এবং যখন তাহা ঝ এবং ঞ হইতে সমদূরবর্ত্তী, তখন তাহা ঝঞ'র মধ্যবিন্দু ও।

আবার, যখন কেন্দ্র, জ্যা কখ এবং জ্যা জহ উভয়েরই সমদ্বিখণ্ডকারী লম্বে স্থিত, তখন তাহা অবশ্যই সেই লম্বদ্বয়ের সম্পাত বিন্দু।

অনুমান ২। বৃত্তের ব্যাস তাহার সমান্তর জ্যা শ্রেণির মধ্যবিন্দুর নিয়ত স্থান।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২।

১। দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যতগুলি ইচ্ছা বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

২। এক রেখাস্থিত নহে এরূপ তিন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কেবল একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

১। মনে কর **ক** এবং **খ** দুটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু। (১ম চিত্র)।

ক, খ দিয়া যত ইচ্ছা ⊙ আঁকা যাইতে পারে।

কারণ, মনে কর **গঙ, কখ**'র সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব।

তাহা হইলে, ∵ **গঙ** স্থিত বিন্দু **ঙ, ঙ´**, ইত্যাদি, **ক** এবং **খ** হইতে সমদূরবর্ত্তী,

∴ **ঙ, ঙ´**, ইত্যাদি, কেন্দ্র এবং **ঙক, ঙ´ক**, ইত্যাদি, ব্যাসার্দ্ধ লইয়া ⊙ আঁকিলে, তাহা **ক** এবং **খ** দিয়া যাইবে।

২। মনে কর **ক, খ, গ´**, তিন বিন্দু এক ঋজুরেখাস্থ নহে।

তাহা হইলে **ক, খ, গ** দিয়া কেবল একটিমাত্র ⊙ আঁকা যায়। (২য় চিত্র)।

কারণ, মনে কর **ঘঙ** এবং **ঙঙ, কগ´** এর এবং **খগ´** এর সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব। তাহা হইলে,

ঘঙ এবং **ঙঙ** অবশ্যই মিলিবে, যে হেতুক

কগ´ এক **খগ´** সমান্তর বা এক ঋজুরেখাস্থ নহে।

মনে কর **ঘঙ** এবং **ঙঙ, ঙ**'তে মিলিত।

তাহা হইলে **ক, খ, গ** দিয়া যে ⊙ যাইবে, **ঙ** তাহার কেন্দ্র।

কারণ, △ওকখ এবং △ওগ´ঘ হইতে ওক = ওগ´(১, উঃ প্রঃ ১২),
এবং △ওগ´ঙ এবং △ওখঙ হইতে ওগ´ = ওখ।

∴ ওকে কেন্দ্র এবং ওককে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ আঁকিলে
তাহা ক, খ, গ´ দিয়া যাইবে।

এবং ক, খ, গ´ দিয়া সেই একটি ⊙ ভিন্ন অন্য কোন বৃত্ত যাইতে পারে না।

কারণ, ঘও এবং ঙও, যাহাদের উভয়েতেই
তদ্রূপ ⊙ এর কেন্দ্র আছে,
কেবল একটি মাত্র বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে (স্বতঃ সিদ্ধ ১০)।

অনুমান ১। এক ঋজুরেখাস্থ তিন বিন্দু দিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় না, অথবা, ঐ কথা অন্য প্রকারে বলিতে গেলে, বৃত্ত, ঋজুরেখাকে দুই অপেক্ষা অধিক সংখ্যক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

কারণ, ক, খ, গ এক ঋজুরেখাস্থ হইলে
লম্ব ঘও, ঙও সমান্তর হইবে এবং মিলিবে না।

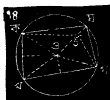
অনুমান ২। যদিও যত ইচ্ছা বিভিন্ন বৃত্তে দুই সাধারণ বিন্দু থাকিতে পারে, কোন বৃত্তদ্বয়ের দুই অপেক্ষা অধিক সংখ্যক সাধারণ বিন্দু থাকিতে পারে না। অথবা, ঐ কথা অন্য প্রকারে বলিতে গেলে, এক বৃত্ত অপর বৃত্তকে দুই অপেক্ষা অধিক সংখ্যক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

যদি পারে, মনে কর ⊙ **কখগঘ** ⊙ **কখগঙ** কে **ক, খ, গ,** এই তিন বিন্দুতে ছেদ করিতেছে।

তাহা হইলে **ক, খ, গ,** এক ঋজুরেখায় থাকিতে পারে না, তাহা এই মাত্র দর্শিত হইয়াছে। এবং এই বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র অবশ্যই **কখ** এবং **খগ**'র সমদ্বিখণ্ডকারী লম্বদ্বয়ের সম্পাত বিন্দু **ও**। **ওক, ওঘঙ** টান। তাহা হইলে **ওক**=**ওঘ**=**ওঙ,** যাহা হইতে পারে না। কারণ, **ওঘ** < **ওঙ**।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩।

১। যদি চারিটি বিন্দু এরূপে অবস্থিত হয় যে তাহাদের উপর দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে, তাহা হইলে তাহাদের যোগ করিয়া যে চতুর্ভুজ হয় তাহার বিপরীত কোণ পরস্পরের পরিপূরক হইবে।

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, যদি কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ পরস্পরের পরিপূরক হয়, তাহা হইলে তাহার কোণবিন্দু চতুষ্টয় দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

১। মনে কর চারিটি বিন্দু **ক, খ, গ, ঘ,** এরূপে অবস্থিত যে তাহাদেব উপর দিয়া একটি ⊙ অঙ্কিত হইতে পারে।

তাহা হইলে ∠**খকঘ** + ∠**খগঘ** = ২ সম ∠ = ∠**কখগ** + ∠**কঘগ**।

মনে কর ⊙ **কখগঘ**'র কেন্দ্র **ও**। **ওক, ওখ, ওগ, ওঘ** যোগ কব।

তাহা হইলে, ∵ **ওক** = **ওখ** = **ওগ** = **ওঘ,**

∴ ∠**ওকখ** = ∠**ওখক** (১, উঃ প্রঃ ৯), ∠**ওকঘ** = ∠**ওঘক**।

∴ যোগদ্বারা, ∠**খকঘ** = ∠**ওখক** + ∠**ওঘক**।

ঐরূপে, ∠**খগঘ** = ∠**ওখগ** + **ওঘগ**।

∴ যোগদ্বারা ∠**খকঘ** + ∠**খগঘ** = ∠**কখগ** + ∠**কঘগ** = ২ সম ∠

(১, উঃ প্রঃ ৮, অনুঃ ৩)।

২। যদি ∠**খকঘ** + ∠**খগঘ** = ∠**কখগ** + ∠**কঘগ** = ২ সম ∠,
তাহা হইলে **ক, খ, গ, ঘ**, দিয়া ⊙ অঙ্কিত হইতে পারে।

কারণ, মনে কর **কখ, খগ**'র সমদ্বিখণ্ডকারী লম্বদ্বয় **ও**তে মিলিত।
তাহা হইলে **ওক** = **ওখ** = **ওগ**। **ওঘ** যোগ কর, এবং যদি সম্ভবপর হয়,

মনে কর, **ওঘ** > **ওক**, এবং **ওঙ** = **ওক**।
তাহা হইলে **ক, খ, গ, ঙ** দিয়া ⊙ অঙ্কিত হইতে পারে।
এবং ∵ ∠**কখগ** + ∠**কঙগ** = ২ সম ∠ = ∠**কখগ** + ∠**কঘগ**
(কল্পনানুসারে),

∴　　∠**কঙগ** = ∠**কঘগ**।

কিন্তু　　∠**কঙও** > ∠**কঘও**, এবং ∠**গঙও** > ∠**গঘও**
(১, উঃ প্রঃ ৮, অনুঃ ২)।

∴ যোগ দ্বারা ∠**কঙগ** > ∠**কঘগ**।

অথচ　　∠**কঙগ** = ∠**কঘগ**। তাহা কখনই হইতে পারে না।

∴　　**ওঘ** > **ওক** হইতে পারে না।

এবং ঐরূপে দর্শিত হইতে পারে,

ওঘ < **ওক** হইতে পারে না।

অতএব　　**ওঘ** = **ওক**,

এবং　　⊙ **কখগ** অবশ্যই **ঘ** দিয়া যাইবে।

টিপ্পনী (১)। যে যে স্থলে **ও** চতুর্ভুজ **কখগঘ**'র বাহিরে বা কোন বাহুতে অবস্থিত, তত্তৎ স্থলে এই প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ করা বিদ্যার্থীর অনুশীলনার্থে রহিল।

টিপ্পনী (২)। চারিটি বিন্দু কেবল সেই স্থলে একপরিধিস্থ যথায় তাহাদের যোগে যে চতুর্ভুজ হয় তাহার বিপরীত কোণ পরস্পরের পরিপূরক।

অনুমান ১। সমবাহু সমানকোণী বহুভুজের কোণবিন্দু সকল একপরিধিস্থ।

উদাহরণ স্বরূপ একটি পঞ্চভুজ **কখগঘঙ** লওয়া যাউক।

∠ঙকখ এবং ∠**কখগ**, **কও** এবং **খও** দ্বারা সমদ্বিখণ্ড কর, এবং তাহাদের মিলনবিন্দু **ও**, **গ**'র সহিত যোগ কর।

তাহা হইলে ∠**ওকখ**=½∠ঙকখ=½∠**কখগ**=∠**ওখক**।

∴ **ওক**=**ওখ**।

আবার △**ওখগ** এবং △**ওখক**'তে, **খগ**=**খক**, **ওখ** উভয়েতেই আছে,

এবং ∠**ওখগ** = ∠**ওখক**। ∴ **ওগ**=**ওক**=**ওখ**।

এবং ∴ ∠**ওগখ**=∠**ওখগ**=½∠**কখগ**=½∠**খগঘ**,

অর্থাৎ **ওগ**, ∠**খগঘ**কে সমান দুইখণ্ড করিতেছে।

এইরূপে দর্শিত হইতে পারে, **ওঘ**=**ওগ**, এবং ∠ **গঘঙ**'র সমদ্বিখণ্ড-কারী। ইত্যাদি।

অতএব **ওক**=**ওখ**=**ওগ**=**ওঘ**=**ওঙ**,

এবং **ও**কে কেন্দ্র আর **ওক**কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ আঁকিলে তাহা বহুভুজের **বহিরঙ্কিত** হইবে।

অনুমান ২। যদি **ও** হইতে **ওচ, ওজ, ওহ** প্রভৃতি বহু-ভুজের বাহুর উপর লম্ব টানা যায়, তাহা হইলে তাহাদের পাদবিন্দু, **চ, জ, হ,** প্রভৃতি একপরিধিস্থ হইবে।

কারণ ১ম অধ্যায়ের ৪ উদাহরণের প্রমাণ প্রণালী অবলম্বনে সপ্রমাণ হইবে যে,

ওচ=**ওজ**=**ওহ**=ইত্যাদি।

অতএব **ও**কে কেন্দ্র এবং **ওচ**কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ অঙ্কিত করিলে তাহা **চ, জ, হ,** প্রভৃতি বিন্দু দিয়া যাইবে। আর এই অধ্যায়ের ৭ উঃ প্রঃ অনুসারে সেই ⊙ বহুভুজের বাহুসকলকে স্পর্শ করিবে, এবং তাহার **অন্তরঙ্কিত** হইবে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৪।

১। বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্রের সমদূরবর্ত্তী।

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, বৃত্তকেন্দ্রের সমদূরবর্ত্তী জ্যা পরস্পর সমান।

১। মনে কর কখ, গঘ, ⊙ কখগঘ'র সমান সমান জ্যা।
তাহা হইলে তাহারা কেন্দ্র ও হইতে সমদূরবর্ত্তী, অর্থাৎ
যদি তাহাদের উপর ওঙ, ওচ ⊥ টানা যায়, ওঙ = ওচ।
ওক, ওগ যোগ কর।
তাহা হইলে কখ, এবং গঘ, ঙ এবং চ তে সমদ্বিখণ্ড হইয়াছে
এবং কঙ = ½কখ = ½গখ = গচ। (২, উঃ প্রঃ ১)
আবার ওঙ² + কঙ² = ওক² = ওগ² = ওচ² + গচ²,
কিন্তু কঙ² = গচ², ∴ ওঙ² = ওচ², এবং ওঙ = ওচ।

২। মনে কর ওঙ = ওচ,

তাহা হইলে কখ = গঘ।

কারণ, ওঙ² + কঙ² = ওক² = ওগ² = ওচ² + গচ²,

এবং ওঙ² = ওচ²,

∴ কঙ² = গচ², এবং ∴ কঙ = গচ।

কিন্তু কখ = ২কঙ, গঘ = ২ গচ (৯, উঃ প্রঃ ১),

∴ কখ = গঘ।

অনুমান ১। কেন্দ্রের নিকটস্থ জ্যা কেন্দ্র হইতে দূরস্থ জ্যা অপেক্ষা বড়।

মনে কর ওঝ ⊥ জহ, এবং ওঝ < ওঙ।

তাহা হইলে জহ > কখ।

কারণ, ওঝ² + জঝ² = ওজ² = ওক² = ওঙ² + কঙ²।

কিন্তু ওঝ² < ওঙ², ∴ জঝ² > কঙ²,

∴ জঝ > কঙ, এবং ∴ জহ > কখ।

অনুমান ২। বৃত্তের ব্যাস অর্থাৎ কেন্দ্রগামী জ্যা অপর সকল জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তম।

মনে কর এওট একটি ব্যাস, জহ একটি জ্যা।

ওজ, ওহ যোগ কর।

তাহা হইলে এট = ওএ + ওট = ওজ + ওহ > জহ

(১, উঃ প্রঃ ১১)।

২। সমান বৃত্তে সমান কোণ ও সমান জ্যা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৫।

সমান অথবা একই বৃত্তে,

১। যদি দুটি চাপ কেন্দ্রস্থ সমান কোণ-দ্বয়ের সম্মুখীন হয়, তবে তাহারা সমান।

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, যদি দুটি চাপ সমান হয়, তবে তাহারা কেন্দ্রস্থ সমান কোণের সম্মুখীন।

১। মনে কর চাপ **কগখ** এবং চাপ **ক´গ´খ´** দুই সমান ⊙ এর **ও, ও´** কেন্দ্রস্থ সমান ∠ **কওখ** এবং ∠ **ক´ও´খ´** এর সম্মুখীন। তাহা হইলে চাপ **কগখ**=চাপ **ক´গ´খ´**।

⊙ **কগখ** কে ⊙ **ক´গ´খ´** এর উপর এরূপে স্থাপিত কর যে, **ও, ও´** এর উপর এবং **ওক, ও´ক´** এর উপর পড়ে।

তাহা হইলে **ক, ক´** এর উপর পড়িবে, ∵ **ওক**=**ও´ক´** (∵ বৃত্তদ্বয় সমান), এবং **ওখ, ও´খ´** এর উপর পড়িবে, ∵ ∠ **কওখ**=∠**ক´ও´খ´**, এবং চাপ **কগখ** চাপ **ক´গ´খ´** এর উপরে পড়িবে, ∵ বৃত্তদ্বয় সমান।

∴ চাপ **কগখ**=চাপ **ক´গ´খ´** (স্বতঃসিদ্ধ ৯)।

২। মনে কর চাপ **কগখ**=চাপ **ক´গ´খ´**।

তাহা হইলে ∠**কওখ**=∠**ক´ও´খ´**।

⊙ **কগখ**কে ⊙ **ক´গ´খ´** এর উপর এরূপে স্থাপিত কর যে, **ও**, **ও´**র উপর পড়ে, এবং **ওক**, **ও´ক´** এর উপর পড়ে।
তাহা হইলে **ক**, **ক´** এর উপর পড়িবে, ∵ **ওক**=**ও´ক´** (∵ বৃত্তদ্বয় সমান),
এবং চাপ **কগখ** চাপ **ক´গ´খ´** এর উপর পড়িবে, (∵ বৃত্তদ্বয় সমান),
এবং **খ**, **খ´** এর উপর পড়িবে, ∵ চাপ **ওখগ**=চাপ **ও´খ´গ´**।
এবং **ওখ**, **ও´খ´** এর উপর পড়িবে, ∵ **ও** এবং **খ**, **ও´** এবং **খ´** এর উপর পড়িয়াছে।

∴ ∠**কওখ**, ∠**ক´ও´খ´** এর উপর পড়িবে,
এবং ∴ ∠**কওখ**=∠**ক´ও´খ´**।

যদি চাপদ্বয় এবং কোণদ্বয় একই বৃত্তে থাকে, তাহা হইলে **ও** এবং **ও´** একই বিন্দু, এবং সে স্থলে বৃত্তচ্ছেদক **কওখ**কে বৃত্তচ্ছেদক **ক´ও´খ´** এর উপর এরূপে স্থাপিত করিতে হইবে যে **ওক**, **ও´ক´** এর উপর পড়ে। প্রমাণের অবশিষ্ট ভাগ উপরের প্রদর্শিত প্রকারেরই হইবে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৬।

সমান অথবা একই বৃত্তে,

১। সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপের সম্মুখীন।

২। পরিবৃত্তক্রমে, সমান সমান চাপের জ্যা পরস্পর সমান।

১। মনে কর **কখ, ক´খ´** দুই সমান বৃত্তের সমান সমান জ্যা।

তাহা হইলে চাপ **কগখ**=চাপ **ক´গ´খ´**।

মনে কর **ও, ও´** বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র।

ওক, ওখ, ও´ক´, ও´খ´ যোগ কর।

তাহা হইলে △ **কওখ** এবং △ **ক´ও´খ´** এতে

ওক=ও´ক´, ওখ=ও´খ´, কখ=ক´খ´,

∴ ∠**কওখ**=∠**ক´ও´খ´** (১, উঃ প্রঃ ১৩),

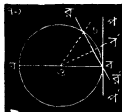
এবং ∴ চাপ **কগখ**=চাপ **ক´গ´খ´** (২, উঃ প্রঃ ৫)।

২। মনে কর চাপ **কগখ** = চাপ **ক′গ′খ′**,
তাহা হইলে জ্যা **কখ** = জ্যা **ক′খ′**।
কারণ, ∵ চাপ **কগখ** = চাপ **ক′গ′খ′**,
∴ ∠ **কওখ** = ∠ **ক′ও′খ′** (২, উঃ প্রঃ ৫),
এবং △ **কওখ** এবং △ **ক′ও′খ′** এতে
কও = **ক′ও′** (∵ বৃত্তদ্বয় সমান)
খও = **খ′ও′**,
∴ **কখ** = **ক′খ′** (১, উঃ প্রঃ ১২)।

যদি জ্যাদ্বয় এবং চাপদ্বয় একই বৃত্তের হয়, তাহা হইলেও স্পষ্ট দেখা যাইতেছে উপরের প্রমাণ প্রণালী ঠিক খাটিবে।

৩। স্পর্শিনী ও পরস্পর স্পর্শী বৃত্ত।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৭।

বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে স্পর্শিনী সেই বিন্দুগামী ব্যাসের লম্ব।

মনে কর ⊙ **নভব** এর **ব** বিন্দুতে **বপ** তাহার স্পর্শিনী।
তাহা হইলে **বপ** ⊥ ব্যাস **বওন**।
ছেদিনী **রভবর**´ টান, **ওভ** যোগ কর,
এবং **পব**কে **প**´ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।
তাহা হইলে, ∵ **ওভ**=**ওব**, ∴ ∠**ওবভ**=∠**ওভব**।
এবং **ওবর**´+∠**ওবভ**=২ সম ∠=∠**ওভর**+∠**ওভব**।
∴ ∠**ওবর**´=∠**ওভর**।
যদি **ভ** ক্রমাগত **ব**'র সন্নিহিত,
ও পরিশেষে তৎসহ মিলিত, হয়,
তাহা হইলে ছেদিনী **রভবর**´, ক্রমাগত **পবপ**´ এর সন্নিহিত,
ও পরিশেষে তৎসহ মিলিত, হইবে,
এবং ∠**বওভ** অন্তর্হিত হইবে,
আর সমান কোণদ্বয় **ওভর**, **ওবর**´, সন্নিহিত কোণ হইবে,
এবং ∠**ওবপ** আর ∠**ওবপ**´ এর সহিত মিলিত হইবে।
∴ ∠ **ওবপ** = ∠ **ওবপ**´ = সম ∠।

অনুমান। স্পর্শিনী **পবপ´**, ⊙ স্পর্শ করে, কিন্তু ছেদ করে না।

কারণ, যদি **বপ** তে যে কোন বিন্দু **ব´** লওয়া যায়,

এবং **ওব´** যোগ করা যায়,

তাহা হইলে, ∵ ∠ **ওবপ** = সম ∠,

∴ ∠ **ওবপ** > ∠ **ওব´ব**,

এবং ∴ **ওব´** > **ওব** (১, উঃ প্রঃ ১০)।

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞার সত্যতা আর এক প্রকারে প্রতীয়মন করা যাইতে পারে।

যথা,—বৃত্তের সমান্তর জ্যা শ্রেণির মধ্যবিন্দুর নিয়তস্থান তদুপরি লম্ব ব্যাস (২, উঃ প্রঃ ১, অনুঃ ২)। এবং ঐ শ্রেণির কোন একটি জ্যা যেমন কেন্দ্র হইতে ক্রমশঃ সরিয়া যায় ও ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হইয়া আসে, (২, উঃ প্রঃ ৪, অনুঃ ১) তাহার সীমাবিন্দুদ্বয় ক্রমশঃ সন্নিহিত ও পরিশেষে মিলিত হয়, এবং সেই শেষ স্থানে অবস্থিত জ্যা বর্দ্ধিত করিলে তাহাই উক্ত ব্যাসের প্রান্তবিন্দুস্থিত স্পর্শিনী হইবে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৮।

বৃত্তের বাহিরের যে কোন বিন্দু হইতে বৃত্তের দুটি স্পর্শিনী টানা যাইতে পারে, এবং তাহারা পরস্পর সমান, ও কেন্দ্রস্থ সমান কোণের সম্মুখীন।

মনে কর ⊙ ঙখচ'র বাহিরে **ক** একটি বিন্দু।

তাহা হইলে **ক** হইতে ঐ ⊙ এর দুটি স্পর্শিনী টানা যাইতে পারে,

এবং তাহারা সমান হইবে আর কেন্দ্র **ও** তে তাহাদের সম্মুখের কোণদ্বয় সমান হইবে।

ওক যোগ কর, **ও** কে কেন্দ্র এবং **ওক** কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ **গকঘ** আঁক। আর **ওক** এবং ⊙ **ঙখচ**'র ছেদবিন্দু **খ** হইতে **ওক**'র উপর **গখঘ** লম্ব টান,

এবং তাহাকে ⊙ **গকঘ** পর্য্যন্ত **গ, ঘ**'তে বর্দ্ধিত করিয়া **ওগ, ওঘ** যোগ কর, আর তাহাদের সহিত ⊙ **ঙখচ**'র ছেদবিন্দু **ঙ**, এবং **চ, ক**'র সহিত যোগ কর।

তাহা হইলে ∵ △ **ওকঙ** এবং △ **ওগখ** এতে

ওক = ওগ, **ওঙ = ওখ**, এবং ∠**কওগ** উভয়েতেই আছে,

∴ **কঙ = গখ**, ∠ **ওঙক** = ∠**ওখগ** = সম ∠।

এবং **কঙ**, ⊙ **ঙখচ**'র স্পর্শিনী (২, উঃ প্রঃ ৭)।
ঐ প্রকারে দেখা যাইবে,

কচ, ⊙ **ঙখচ**'র স্পর্শিনী, এবং = **ঘখ**।

এবং **গখ** = **ঘখ** (২ উঃ প্রঃ ১),

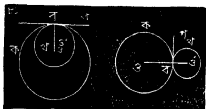
∴ **কঙ** = **কচ**।

আবার, △ **কওঙ**, △ **কওচ**'তে,

ওঙ = **ওচ**, **ওক** উভয়েতেই আছে, এবং **কঙ** = **কচ**,

∴ ∠ **কওঙ** = ∠ **কওচ** (১, উঃ প্রঃ ১৩)।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৯।

যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরে স্পর্শ করে, তাহারা কেবল এক বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, এবং তাহাদের কেন্দ্রের যোজক ঋজুরেখা সেই স্পর্শবিন্দু দিয়া যাইবে।

১ চিত্র ২ চিত্র

মনে কর ⊙ **বক** এবং ⊙ **বখ**, যাহাদের কেন্দ্র **ও** এবং **ও´**, **ব** তে স্পর্শ করিতেছে।

তাহা হইলে তাহারা অন্য কোন বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিবে না এবং **ওও´**, **ব** দিয়া যাইবে।

কারণ, ∵ এই বৃত্তদ্বয় কেবল দুই বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে,
(২, উঃ প্রঃ ২, অনুঃ ২)

এবং সেই ছেদবিন্দুদ্বয় **ব**'তে মিলিত (২, পরিভাষা ৪),

∴ এই বৃত্তদ্বয় আর অন্য কোন বিন্দুতে মিলিতে পারে না।

এবং ∵ এই বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দুদ্বয়ের পরিশেষে মিলন বিন্দু **ব** হইতেছে,

∴ তাহাদের সেই সাধারণ ছেদবিন্দুদ্বয়ের যোজক উভয়ের সাধারণ ছেদিনী, **ব** তে তাহাদের উভয়ের সাধারণ স্পর্শিনীতে পরিণত হইবে।

∴ **ওব**, **ও´ব** উভয়েই সেই সাধারণ স্পর্শিনী **বপ**'র লম্ব হইবে,
(২, উঃ প্রঃ ৭)।

∴ ∠ওবপ = সম ∠ = ∠ও′বপ।

সুতরাং ওব এবং ও′ব মিলিত হইবে, যথা ১ম চিত্রে,

অথবা এক ঋজুরেখায় থাকিবে, যথা ২য় চিত্রে।

(১, উঃ প্রঃ ২)।

৪। বৃত্তস্থিত কোণ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১০।

বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ একই চাপের উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

মনে কর ∠ **কওখ** এবং ∠ **কগখ**, ⊙ **কগঘ**'র
কেন্দ্র **ও** তে এবং O তে স্থিত এবং একই চাপ **কখ** তে দণ্ডায়মান।
তাহা হইলে ∠ **কওখ** = ২ × ∠ **কগখ**।
গও যোগ কর এবং **ঘ** পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর।
তাহা হইলে ∠**কওঘ** = ∠**কগও** + ∠**ওকগ** (১, উঃ প্রঃ ৮, অনুঃ ১)
= ২∠**কগও** (∵ ∠**কগও** = ∠**ওকগ**)।
সেই কারণে, ∠**খওঘ** = ২∠**খগও**।
অতএব ১ ও ২ চিত্রে যোগ দ্বারা এবং ৩ চিত্রে বিয়োগ দ্বারা,
∠**কওখ** = ২∠**কগখ**।

অনুমান ১। একই বৃত্তখণ্ড **কগগ´খ** স্থিত ∠**কগখ** এবং ∠**কগ´খ** সমান।
কারণ, উভয়েই ∠**কওখ** এর অর্দ্ধেক।

অনুমান ২। পরিবৃত্ত ক্রমে, যদি ∠**কগখ** = ∠**কগ´খ**,
তাহা হইলে **ক, গ, গ´, খ** একপরিধিস্থ।

কারণ, যদি তাহা না হয়, মনে কর ⊙ **কখগ, কগ´** কে **ঙ'** তে (**ঙ** চিত্রে দর্শিত হয় নাই) ছেদ করিয়াছে।

তাহা হইলে, **খঙ** যোগ করিলে,

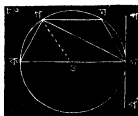
∠**কঙখ** = ∠**কগখ** = ∠**কগ´খ**।

কিন্তু তাহা অসম্ভব (১, উঃ প্রঃ ৮, অনুঃ ২), যদি **ঙ** ও **গ´** মিলিত না হয়।

অনুমান ৩। সমান সমান অথবা একই বৃত্তে,
সমান সমান বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ পরস্পর সমান।

কারণ, তাহারা সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান, এবং সেই সেই সমান চাপ যে যে কেন্দ্রস্থ কোণের সম্মুখীন, তাহারা সমান (২, উঃ প্রঃ ৫)। আর সমান সমান বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ উক্ত সমান সমান কেন্দ্রস্থ কোণের অর্দ্ধেক, সুতরাং তাহারাও অবশ্যই সমান।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১১।

বৃত্তার্দ্ধস্থ কোণ, সমকোণ। বৃত্তার্দ্ধ অপেক্ষা বড় বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ, সমকোণ অপেক্ষা ছোট। এবং বৃত্তার্দ্ধ অপেক্ষা ছোট বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ, সমকোণ অপেক্ষা বড়।

মনে কর, **কগখ** বৃত্তার্দ্ধ **কওখ** ব্যাস,
বৃত্তখণ্ড **খকগ** বৃত্তার্দ্ধ অপেক্ষা বড়,
বৃত্তখণ্ড **খঘগ** বৃত্তার্দ্ধ অপেক্ষা ছোট।

তাহা হইলে ∠**কগখ**=সম∠ ,
∠**খকগ**<সম∠ ,
∠**খঘগ**>সম∠ ।

গও (**ও** কেন্দ্র) যোগ কর।

তাহা হইলে, **ওক**=**ওখ**=**ওগ**,
∴ ∠**ওগক**=∠**ওকগ**, ∠**ওগখ**=∠**ওখগ**।
∴ যোগে, ∠**কগখ**=∠**ওকগ**+∠**ওখগ**।
কিন্তু ∠**কগখ**+∠**ওকগ**+∠**ওখগ**=২ সম∠ (১, উঃ প্রঃ ৮),
∴ ∠**কগখ**=½×২সম∠ =সম∠ ।
সুতরাং ∠**খকগ**<সম∠ ।
আবার ∠**খকগ**+∠**খঘগ**=২সম∠(২, উঃ প্রঃ ৩),
এবং ∠**খকগ**<সম∠,
∠**খঘগ**>সম∠ ।

অনুমান। যদি । **পখপ´** ⊙ **কখঘগ** কে স্পর্শ করে, এবং স্পর্শবিন্দু **খ** হইতে একটি জ্যা **খগ** টানা যায়, তাহা হইলে ঐ জ্যা স্পর্শিনীর সহিত যে কোণদ্বয় উৎপন্ন করে, তাহারা একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণের সমান হইবে।

কারণ, ∠**গখপ** + ∠**কখগ** = সম ∠

= ∠**খকগ** + ∠**কখগ**,

∴ ∠**গখপ** = ∠**খকগ** (যাহা একান্তর বৃত্ত খণ্ডস্থ)।

আবার ∠**গখপ** + ∠**গখপ´** = ২সম ∠ (১, উঃ প্রঃ ১)

= ∠**খকগ** + ∠**খঘগ**

(২, উঃ প্রঃ ৩),

এবং ∠**গখপ** = ∠**খকগ**,

∴ ∠**গখপ´** = ∠**খঘগ**।

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞার সত্যতা নিম্নলিখিত প্রকারেও প্রতীয়মান হইতে পারে।

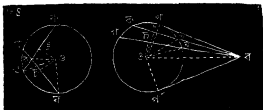
∠**কগখ** = ½ ∠**কওখ** (২, উঃ প্রঃ ১০) = ½ × ২সম ∠ = সম ∠,

∠**খকগ** = ½ ∠**খওগ** < ½ × ২সম ∠ < সম ∠,

∠**খঘগ** = ½ বিরূপ ∠**গওখ** > ½ × ২ সম ∠ > সম ∠।

৫। সম্পাতী জ্যা ও ছেদিনী।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১২।

যদি দুটি জ্যা বৃত্তের অন্তরে বা বাহিরে পরস্পরকে ছেদ করে, একের খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত অপরের খণ্ডদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

মনে কর বৃত্ত **কগখ**'র জ্যাদ্বয় **কখ**, **গঘ**, **ব** তে
পরস্পরকে ছেদ করিতেছে।

তাহা হইলে **কব খব = গব · ঘব**।

কেন্দ্র **ও** হইতে **কখ** এবং **গঘ**'র উপর ⊥ **ওঙ** এবং **ওচ** টান,

এবং **ওব**, **ওখ**, **ওঘ** যোগ কর।

তাহা হইলে **কখ** এবং **গঘ**, ঙ, এবং **চ** তে সমদ্বিখণ্ড (২, উঃ প্রঃ ১),
এবং **ব** তে বিষম দ্বিখণ্ড হইয়াছে,

∴ **কব খব**=ঙখ² এবং ঙব² এর অন্তর (১, উঃ প্রঃ ২৫, ২৬)
=ঙখ²+ওঙ² এবং ঙব²+ওঙ² এর অন্তর
=ওখ² এবং ওব² এর অন্তর (১, উঃ প্রঃ ২১)
=ওঘ² এবং ওব² এর অন্তর (∵ ওখ=ওঘ)
=ওচ²+চঘ² এবং ওচ²+চব² এর অন্তর
=চঘ² এবং চব² এর অন্তর
=গব . ঘব (১, উঃ প্রঃ ২৫, ২৬)।

অনুমান ১। যদি জ্যাদ্বয় বৃত্তের বাহিরে ব'তে পরস্পরকে ছেদ করে, এবং **ব** হইতে স্পর্শিনী **বপ** টানা যায়, তাহা হইলে

বপ² = **কব খব**।

কারণ **বপ**² = **ওব**² − **ওপ**² (১, উঃ প্রঃ ২১) = **ওঙ**² + **ঙব**² − **ওখ**²
= **ওঙ**² + **ঙখ**² + **কব·খব** − **ওখ**² (১, উঃ প্রঃ ২৬)
= **ওখ**² + **কব·খব** − **ওখ**² = **কব·খব**।

এই কথা নিম্নলিখিত প্রকারেও সপ্রমাণ করা যাইতে পারে।

ছেদিনী **বখক** ক্রমশঃ সরিয়া যাইতে যাইতে, যখন ছেদ বিন্দুদ্বয়, **খ** এবং **ক**, মিলিয়া যায়, তখন ছেদিনী **বখক**, স্পর্শিনী **বপ**'র স্থানে আইসে, এবং ছেদিনীর খণ্ডদ্বয়, **বখ**, **বক**, তখন **বপ**'র সহিত মিলিয়া যায়। সুতরাং

বক বখ = **বপ · বপ** = **বপ**²।

অনুমান ২। পরিবৃত্তক্রমে যদি **বক · বখ** = **বপ**² হয়, তাহা হইলে **বপ** বৃত্তের স্পর্শিনী হইবে।

কারণ **বপ´** স্পর্শিনী টানিয়া, **ওপ´** যোগ করিলে,

বপ² = **কব · খব** = **বপ´**², ∴ **বপ´** = **বপ**।

অতএব △ **ওবপ**, △ **ওবপ´** এতে,

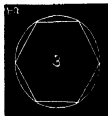
বপ = **বপ´**, **ওপ** = **ওপ´**, এবং **ওব** উভয়েতেই আছে,

∴　∠ **ওপব** = ∠ **ওপ´ব** = সম ∠,

এবং ∴　**বপ** বৃত্ত **গকপ**'র স্পর্শিনী।

৬। বৃত্তের অন্তরঙ্কিত ও বহিরঙ্কিত বহুভুজ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৩।

যদি কোন বৃত্তের পরিধি কতকগুলি সমান ভাগে বিভক্ত করা যায়, এবং বিভাগ বিন্দু-গুলি ঋজুরেখা দ্বারা যোগ করা যায়, তাহা হইলে সেই ভাগ সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট সমবাহু সমান কোণী বহুভুজ সেই বৃত্তে অন্তরঙ্কিত হইবে।

কারণ, স্পষ্ট দেখা যাইতেছে,

বৃত্তের পরিধি যতগুলি ভাগে বিভক্ত হইয়াছে,

বহুভুজের ততগুলি বাহু থাকিবে।

বহুভুজ সমবাহু হইবে,

কারণ, তাহার বাহুগুলি সমান চাপের জ্যা (২, উঃ প্রঃ ৬)।

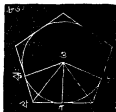
এবং বহুভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে,

কারণ, তাহার প্রত্যেক কোণই সমান চাপদ্বয় বিশিষ্ট বৃত্ত খণ্ডস্থ।

(২, উঃ প্রঃ ১০, অনুঃ ৩)।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৪।

যদি কোন বৃত্তের পরিধি কতকগুলি সমানভাগে বিভক্ত হয়, এবং প্রত্যেক বিভাগ বিন্দুতে এক একটি স্পর্শিনী টানা যায়, তাহা হইলে সেই ভাগসংখ্যক বাহুযুক্ত একটি সমবাহু সমানকোণী বহুভুজ সেই বৃত্তে বহিরঙ্কিত হইবে।

স্পষ্ট দেখা যাইতেছে পরিধির ভাগ সংখ্যা যত,

বহুভুজের ততগুলি বাহু থাকিবে।

এবং বহুভুজটি সমবাহু ও সমানকোণী হইবে,

কারণ, বৃত্ত কেন্দ্র **ও** পর পর তিনটি স্পর্শবিন্দু **ক**, **গ**, ঙ'র সহিত এবং বহুভুজের দুটি তন্মধ্যস্থিত কোণ বিন্দু **খ**, **ঘ**'র সহিত যোগ করিলে, দেখা যাইবে, ∵ স্পর্শিনী **খক** = স্পর্শিনী **খগ** (২, উঃ প্রঃ ৮),

ওক = **ওগ**,

এবং　∠**ওকখ** = ∠**ওগখ** (∵ প্রত্যেকেই সম∠)

∴　Δ**ওকখ** = Δ**ওগখ**　সর্ব্বাংশে (১, উঃ প্রঃ ১২),

এবং　∠**ওখক** = ∠**ওখগ**,

∠**কওখ** = ∠**গওখ**।

অর্থাৎ　∠**কখগ** = ২∠**ওখগ**,

∠**গওখ** = ½∠**গওক**।

এবং সেই কারণে △ **ওঙঘ** = △ **ওগঘ** সর্ব্বাংশে,

এবং ∠**গওঘ** = ½∠**গওঙ**,

∠**গঘঙ** = ২∠**ওঘগ**।

কিন্তু ∠**গওক** = ∠**গওঙ** (∵ চাপ **কগ**=চাপ **ঙগ**),

∴ ∠**গওখ** = ∠**গওঘ**।

এবং ∠**ওগখ** = ∠**ওগঘ** (∵ উভয়েই সম ∠),

আর বাহু **ওগ** △ **ওগখ**, △ **ওগঘ** উভয়েতেই আছে,

∴ **খগ** = **ঘগ**,

∠**ওখগ** = ∠**ওঘগ**।

অতএব **খঘ** = ২ **খগ**।

সুতরাং দেখা যাইতেছে, এই বহুভুজের
বাহুগুলি সমান সমান স্পর্শিনীর দ্বিগুণ,
এবং কোণগুলি সমান সমান কোণের দ্বিগুণ।
অর্থাৎ ইহা সমবাহু ও সমানকোণ বিশিষ্ট।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা।

১। বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয়।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

যে কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত বা চাপের কেন্দ্র নির্ণয় কর।

মনে কর **কখগ** নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত বা চাপ।
তাহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।
বৃত্ত পরিধিতে বা চাপে যে কোন বিন্দু **খ** লইয়া,
কখ, খগ যোগ কর, **কখ**কে **ঘ**তে, **খগ**কে **ঙ**তে
সমদ্বিখণ্ডে ভাগ কর, এবং **ঘও, ঙও ⊥ কখ, খগ** টান।

ঘও এবং **ঙও**'র সম্পাতবিন্দু **ও** ইষ্ট কেন্দ্র হইবে।

কারণ, ∵ কেন্দ্র, **ক** এবং **খ**'র সমদূরবর্ত্তী,
∴ তাহা **ঘও**তে স্থিত (১, সঃ প্রঃ ৬, অনুঃ ১)।
এবং সেই কারণে তাহা **ঙও**তে স্থিত।
∴ তাহা **ঘও** এবং **ঙও**'র সম্পাতবিন্দু **ও**।

২। বৃত্তের স্পর্শিনী অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—২।

একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের স্পর্শিনী অঙ্কিত কর।

মনে কর **ব** বিন্দু হইতে **কখগ** বৃত্তের স্পর্শিনী অঙ্কিত করিতে হইবে।
বৃত্তের কেন্দ্র **ও** নির্ণয় করিয়া **ওব** যোগ কর।
ব যদি ⊙ তে থাকে **বপ** ⊥ **ওব** টান।
বপ বৃত্তের স্পর্শিনী হইবে (২, উঃ প্রঃ ৭)।
ব যদি ⊙ এর বাহিরে থাকে, **ওব**'র মধ্যবিন্দু **ঘ** নির্ণয় কর,
ঘকে কেন্দ্র, **ওঘ**কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ○ **ওপবপ´** অঙ্কিত কর,
এবং বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু **প**, **প´** কে **ব**'র সহিত যোগ কর।
বপ, **বপ´** ⊙ **কখগ**'র স্পর্শিনী হইবে।
কারণ, **ওপ**, **ওপ´** যোগ করিলে দেখা যায়,
∵ **ওপব** এবং **ওপ´ব** উভয়ই অর্দ্ধবৃত্ত,
∴ ∠**ওপব** এবং ∠**ওপ´ব** উভয়ই সম ∠(২, উঃ প্রঃ ১১),
এবং **বপ**, **বপ´** উভয়ই ⊙ **কখগ**'র স্পর্শিনী (২, উঃ প্রঃ ৭)।

৩। নির্দ্দিষ্ট নিয়মাধীন বৃত্তখণ্ড অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩।

নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখার উপর এরূপ একটি বৃত্ত-খণ্ড অঙ্কিত করিতে হইবে যাহাতে একটি নির্দ্দিষ্ট কোণ থাকে।

মনে কর | **কখ**'র উপর এরূপ একটি বৃত্তখণ্ড অঙ্কিত করিতে হইবে যাহাতে স্থিত ∠ = ∠গ।

কখ'র **খ** বিন্দুতে ∠**কখঘ** = ∠**গ** অঙ্কিত কর (১, সঃ প্রঃ ২),
খঘ'র উপর ⊥**খও** টান, **কখ**'র মধ্যবিন্দু ঙ নির্ণয় কর,
কখ'র উপর ঙও ⊥ টান, এবং **ঙও**, **খও**'র সম্পাত বিন্দু **ও**কে কেন্দ্র, **ওখ**কে ব্যাসার্দ্ধ, করিয়া ⊙ **কচখ** অঙ্কিত কর।
তাহা হইলে **কচখ** ইষ্ট বৃত্ত খণ্ড হইবে।
কারণ, ∵ ⊙**কচখ**'র কেন্দ্র **ও**, এবং **ওখ**⊥**খঘ**,
∴ **খঘ**, ⊙ **কচখ**'র স্পর্শিনী (২, উঃ প্রঃ ৭),
এবং ∴ **কচখ** বৃত্তখণ্ডস্থ∠ = ∠**কখঘ** (২, উঃ প্রঃ ১১, অনুঃ) = ∠**গ**।
আর **কচখ** বৃত্ত খণ্ড **কখ**'র উপর অঙ্কিত হইয়াছে।

টিপ্পনী ১। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত হইতে নির্দ্দিষ্ট কোণধারী বৃত্তখণ্ড ছেদ করিতে হইলে, বৃত্তের স্পর্শিনী **খঘ** টানিয়া, ∠**ঘখক** = নির্দ্দিষ্ট ∠ অঙ্কিত করিলে, **খক** দ্বারা যে বৃত্তখণ্ড **কচখ** বিচ্ছিন্ন হইবে তাহাই ইষ্ট বৃত্তখণ্ড হইবে।

টিপ্পনী ২। নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর নির্দ্দিষ্টশীর্ষকোণ বিশিষ্ট ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর নিয়ত স্থান, সেই ভূমির উপর অঙ্কিত সেই কোণধারী বৃত্তখণ্ড।

৪। চাপ সমদ্বিখণ্ড করণ।

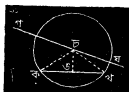
সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৪।

একটি নির্দ্দিষ্ট চাপকে সমান দুইখণ্ড কর।

মনে কর চাপ **কগখ**কে সমান দুইখণ্ড করিতে হইবে।
কখ যোগ কর, তাহার মধ্যবিন্দু **ঘ** নির্ণয় কর,
এবং **কখ**'র উপর ⊥ **ঘগ** টান।
ঘগ এবং চাপ **কগখ**'র ছেদবিন্দু **ঘ**
কগখ'র মধ্যবিন্দু।
কারণ, **কঘ=খঘ, গঘ** উভয় △ **কঘগ**, △ **খঘগ**তে আছে, এবং
∠**কঘগ**=সম∠ = ∠**খঘগ**,
∴ △**কঘগ** এবং △**কঘগ** হইতে,
কগ = **খগ** (১,উঃ প্রঃ ১২),
এবং ∴ চাপ **কগ** = চাপ **খগ** (২, উঃ প্রঃ ৬)।

৫। নির্দ্দিষ্ট নিয়মাধীন বৃত্ত অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৫।

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে, এবং যাহার কেন্দ্র একটি নির্দ্দিষ্ট ঋজু রেখাতে থাকিবে।

মনে কর এরূপ একটি ○ অঙ্কিত করিতে হইবে
যাহা **ক**, **খ**, দিয়া যাইবে, এবং যাহার কেন্দ্র | **গঘ**তে থাকিবে।
কখ যোগ কর, **কখ**কে **ঙ**তে সমদ্বিখণ্ডে ভাগ কর,
কখ'র উপর **ঙচ** ⊥ টান, এবং **ঙচ**কে বর্দ্ধিত করিয়া **গঘ**'র সহিত মিলাও। তাহাদের সম্পাতবিন্দু **চ** ইষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

কারণ, **চক**, **চখ** যোগ করিলে দেখা যায়,

△ **চঙক**, △ **চঙখ** হইতে

চক=**চখ** (১, উঃ প্রঃ ১২)।

∴ **চ**কে কেন্দ্র এবং **চক**কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ আঁকিলে তাহা **খ** দিয়া যাইবে, এবং তাহার কেন্দ্র | **গঘ**তে আছে।

টিপ্পনী ১। ইষ্টবৃত্তের কেন্দ্র অবশ্যই | **কখ**'র সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব **ঙচ**তে থাকিবে। সুতরাং তাহা **ঙচ** এবং **গঘ**'র সম্পাতবিন্দু **চ**। যদি **ঙচ** ‖ **গঘ**, তাহা হইলে এ প্রতিজ্ঞা সম্পাদ্য নহে। যদি **ঙচ**, **গঘ** র সহিত এক ঋজুরেখায় থাকে, এ প্রতিজ্ঞার কোন নির্দ্দিষ্ট সমাধান হয় না, **ঘগ** স্থিত যে কোন বিন্দু ইষ্টবৃত্তের কেন্দ্র হইতে পারে।

টিপ্পনী ২। দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যতগুলি ইচ্ছা বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় (২, উঃ প্রঃ ২)। সুতরাং **ক, খ,** বিন্দুদ্বয়গামী বৃত্ত অন্তনিয়মও রক্ষা করিতে পারে। এই প্রতিজ্ঞায় অন্য একটি নিয়ম, অর্থাৎ নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখায় কেন্দ্র থাকা, রক্ষা করিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইয়াছে। ইহার পরবর্ত্তী প্রতিজ্ঞাতেও অন্য একটি নিয়ম, অর্থাৎ একটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখা স্পর্শ করা, রক্ষা করিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৬।

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে, এবং একটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখাকে স্পর্শ করিবে।

মনে কর এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে,

যাহা **ক**, **খ**, দিয়া যাইবে এবং | **গঘ** কে স্পর্শ করিবে।

প্রথমতঃ মনে কর **কখ** এবং **গঘ**, **ঙ** তে মিলিত।

ঙপ এরূপে নির্ণয় কর যে, **ঙপ**^{2} = **কঙ**·**ঙখ** (১, সঃ প্রঃ ১১),

এবং **ক**,**খ**,**প**, দিয়া ○ আঁক (২, উঃ প্রঃ ২, অনুসারে)।

সেই বৃত্ত **গঘ** কে স্পর্শ করিবে,

∵ **ঙপ**^{2} = **কঙ** · **ঙখ** (২, উঃ প্র ১২, অনুঃ ২)।

দ্বিতীয়তঃ মনে কর **কখ** ॥ **গঘ**।

কখ কে **ঙ** তে সমদ্বিখণ্ড করিয়া **ঙপ** ⊥ **গঘ** টান,

খপ যোগ কর, এবং ∠ **পখও** = ∠ **খপঙ** অঙ্কিত কর।

মনে কর **ঙপ** এবং **খও**'র সম্পাত বিন্দু **ও**।

তাহা হইলে ইষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র **ও**, এবং ব্যাসার্দ্ধ **ওপ** হইবে।

কারণ, **ও** কে কেন্দ্র এবং **ওপ** কে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া

⊙ আঁকিলে তাহা **ক**, **খ** দিয়া যাইবে, ∵ **ওক** = **ওখ** = **ওপ**,

এবং **গঘ** কে স্পর্শ করিবে, ∵ **ওপ** ⊥ **গঘ**।

টিপ্পনী। যদি **কখ** এবং **গঘ**'র সম্পাতবিন্দু **ক** এবং **খ**'র মধ্যে পড়ে, তবে এই প্রতিজ্ঞা সম্পাদন অসাধ্য।

৬। বৃত্তের অন্তরে ও বাহিরে ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৭।

কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের অন্তরে ও বাহিরে সমবাহু সমানকোণী ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ, এবং ষড়্ভুজ অঙ্কিত কর।

১। সমবাহু সমানকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করণ।

এ স্থলে O অর্থাৎ কেন্দ্রস্থ ৪ সম ∠ সমান ৩ ভাগে ভাগ করিতে হইবে।

একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকিয়া (১, সঃ প্রঃ ১) তাহার এক বাহু উভয় দিকে বর্দ্ধিত কর। **ওক** ব্যাসার্দ্ধ টান।

এবং ∠ **কওখ** = সমবাহু △ এর বাহিরের ∠ = ∠ **কওগ** অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে, ∠**কওখ** = ∠**কওগ** = ∠**খওগ**,

∴ চাপ **কখ** = চাপ **কগ** = চাপ **খগ**।

∴ △**কখগ** সমবাহু সমানকোণী ত্রিভুজ (৯, উঃ প্রঃ ১৩)।

২। ঐ রূপ চতুর্ভুজ আঁকিতে হইলে,

O সমান ৪ ভাগে ভাগ করিতে হইবে।

যে কোন একটি ব্যাস টান এবং তদুপরি ⊥ আর একটি ব্যাস টান। তাহারা কেন্দ্রে ৪টি সম ∠ উৎপন্ন করিবে ও সেই সম ∠ ৪টি সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান হইবে।

অতএব তাহাদের সীমাবিন্দু যোজক চতুষ্টয় ইষ্ট চতুর্ভুজ নির্ম্মাণ করিবে (৯, উঃ প্রঃ ১৩)।

৩। ঐরূপ পঞ্চভুজ আঁকিতে হইলে,
○ সমান ৫ ভাগে ভাগ করিতে হইবে।
এরূপ একটি সমদ্বিবাহু △ অঙ্কিত কর যাহার ভূমিসংলগ্ন ∠ দ্বয়
প্রত্যেকে তাহার শীর্ষ কোণের দ্বিগুণ (১, সঃ প্রঃ ১২)।
তাহা হইলে তাহার

ভূমিসংলগ্ন ∠ = ৪/৫ সম ∠ = ১/৫ × ৪ সম ∠।

কেন্দ্র ও তে ঐ △ এর ভূমিসংলগ্ন ∠ এর সমান ৫টি কোণ অঙ্কিত কর,
তাহা হইলে ○ সমান ৫ ভাগে বিভক্ত হইবে, এবং সেই বিভাগবিন্দু
যোগ করিলে ইষ্ট পঞ্চভুজ পাওয়া যাইবে (২, উঃ প্রঃ ১৩)।

৪। ঐরূপ ষড়্‌ভুজ আঁকিতে হইলে, ১ম চিত্রের কেন্দ্রস্থ ∠ ৩টি সমান দ্বিখণ্ড করিলেই,
○'র ছেদবিন্দু ৬টি পাওয়া যাইবে,
এবং তাহাদের যোগদ্বারা ইষ্ট ষড়্‌ভুজ অঙ্কিত হইবে।

৫। তিন, চারি, পাঁচ, ছয়, বাহুবিশিষ্ট সমবাহু সমানকোণী ক্ষেত্র বৃত্তে বহিরঙ্কিত করিতে হইলে, ○ কে উপরে দর্শিত প্রণালীতে সমান ভাগে ভাগ করিয়া ভাগবিন্দুতে স্পর্শিনী টানিলে, ইষ্টক্ষেত্র পাওয়া যাইবে।
(২, উঃ প্রঃ ১৪)।

৭। বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৮।

বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

বৃত্ত বেষ্টন করিয়া ন সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সমবাহু সমানকোণী একটি বহুভুজ অঙ্কিত কর।

কেন্দ্র হইতে তাহার কোণ বিন্দুসমূহ পর্য্যন্ত | টানিয়া বহুভুজকে ন সংখ্যক সমান Δ এ বিভক্ত কর।

মনে কর ব্যাসার্দ্ধ = ব, পরিধি = গ, বহুভুজের বাহু = অ।

তাহা হইলে তাহার পরিমিতি বা বাহুসমষ্টি = নঅ।

প্রত্যেক ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ½ অব (১, উঃ প্রঃ ২০, টিঃ ২),

বহুভুজের ক্ষেত্রফল = ½ অব × ন = ½ব × নঅ

= ½ব × বহুভুজের পরিমিতি।

এখন যদি ন কে অসীমরূপে বর্দ্ধিত করা যায়, তাহা হইলে বহুভুজের পরিমিতি = গ।

∴ বহুভুজের ক্ষেত্রফল = ½বগ,

এবং ∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = বহুভুজের ক্ষেত্রফল = ½ বগ।

বৃত্তের আকার সৌষ্ঠব দৃষ্টে অনুমান করা যায় গঃব্ এই অনুপাত সকল বৃত্তেই সমান (পরবর্ত্তী ৩, সঃ প্রঃ ৬, টিঃ ২ দ্রষ্টব্য)।

বিদ্যার্থী পরে জানিবেন গ = ২ পর,

সুতরাং বৃত্তের ক্ষেত্রফল = পর^{২},

এবং　　　　প = ৩·১৪১৫৯২৬৫ ·

বিদ্যার্থী পরে জানিবেন প কোন সসীম অঙ্কদ্বারা প্রকাশযোগ্য বা পরিমেয় নহে, তবে তাহার মূল্যের যতদূর সন্নিহিত অঙ্ক পাইতে ইচ্ছা করা যায় তাহা পাওয়া যায় (পরবর্ত্তী ৩, সঃ প্রঃ ৬ দ্রষ্টব্য)।

সহজেই দেখা যাইতেছে প > ৩ < ৩$\frac{১}{৭}$।

কারণ গ > অন্তরঙ্কিত সমবাহু সমানকোণী ষড়্ভুজের পরিমিতি > ৬ র,

এবং　গ < বহিরঙ্কিত　　·　　·　　… < ৬ ওখ

(২য় চিত্র)।

আর ওক^{২} = ওখ^{২} − $\frac{১}{৪}$ ওখ^{২} = $\frac{৩}{৪}$ ওখ^{২}।

$$\therefore \text{ওক} = \frac{\sqrt{৩}}{২} \text{ ওখ},$$

$$\text{এবং } \therefore \text{ ওখ} = \frac{২}{\sqrt{৩}} \cdot \text{ওক} = \frac{২}{\sqrt{৩}} \text{ র।}$$

$$\therefore ৬ \text{ ওখ} = ৪\sqrt{৩} \cdot \text{র} = ৬.৯২ \times \text{র।}$$

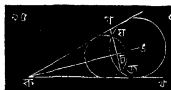
$$\therefore \text{ গ} < ৬.৯২ \times \text{র}$$

$$\text{এবং } \text{প} = \text{গ} \div ২\text{র} > ৩ < ৩\tfrac{১}{৭}\text{।}$$

চতুর্থ পরিচ্ছেদ।

অনুশীলনার্থ উদাহরণ।

উপপন্ন বা সম্পাদিত উদাহরণ।

১। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা একটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে, এবং দুইটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখাকে স্পর্শ করিবে।

মনে কর **কখ, কগ** নির্দ্দিষ্ট দুইটি ঋঃ রেঃ, এবং **ঘ**, নির্দ্দিষ্ট বিন্দু।
তাহা হইলে ∵ ⊙, **কখ, কগ** স্পর্শ করিবে,
∴ তাহার কেন্দ্র ∠**খকগ**'র সম দ্বিখণ্ডকারী **কঙ**তে থাকিবে (১, সঃ প্রঃ ৩, অনুঃ)।
ঘচ ⊥ **কঙ** টান এবং **চজ**=**চঘ** করিয়া লও।
তাহা হইলে ইষ্ট ⊙ **জ** দিয়া যাইবে,
∵ তাহার কেন্দ্র **কঙ**তে এবং তাহা **ঘ** দিয়া যাইবে।

অতএব এই প্রতিজ্ঞা এই আকারে পরিবর্ত্তিত হইল,
যথা,—এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা দুইটি বিন্দু **ঘ** এবং **জ** দিয়া যাইবে এবং একটি ঋজুরেখা **কখ** বা **কগ**কে স্পর্শ করিবে (কারণ একটিকে স্পর্শ করিলে অপরটিকে অবশ্যই স্পর্শ করিবে)। এই শেষোক্ত প্রতিজ্ঞা এই অধ্যায়ের ৬ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা। প্রতিজ্ঞাটি সপ্রমাণ করিবার ভার বিদ্যার্থীর উপর রহিল।

যে স্থলে নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখাদ্বয় সমান্তর সে স্থলের প্রতিজ্ঞা সম্পাদনের ভারও বিদ্যার্থীর উপর রহিল। মনে রাখিতে হইবে, শেষোক্ত স্থলে নির্দ্দিষ্ট বিন্দু রেখাদ্বয়ের বাহিরে থাকিলে প্রতিজ্ঞা সম্পাদন সাধ্য নহে।

২। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা দুইটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

মনে কর **ক, খ** নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, **গঘঙ** নির্দ্দিষ্ট ⊙। ⊙ **গঘঙ** তে যে কোন বিন্দু **গ** লইয়া, **গ, খ, ক,** দিয়া একটি ⊙ আঁক (২, উঃ প্রঃ ২ দ্রষ্টব্য), এবং মনে কর ঐ ⊙ এবং ⊙ **গঘঙ**'র ছেদবিন্দু **গ** এবং ঙ। **কখ** এবং **গঙ** কে বর্দ্ধিত করিয়া **চ** তে মিলাও, **চ** হইতে ⊙ **গঘঙ**'র স্পর্শিনী **চঘ** টান, এবং **ক, খ, ঘ,** দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। তাহাই ইষ্ট বৃত্ত হইবে।

কারণ, **কচ · চখ = গচ চঙ = চঘ**² (২, উঃ প্রঃ ১২),

∴ **চঘ,** ⊙ **কখঘ** কে স্পর্শ করিতেছে।

এবং ∵ **চঘ,** ⊙ **কখঘ** কে স্পর্শ করিতেছে,

∴ ⊙ **কখঘ** এবং ⊙ **গঘঙ** উভয়েরই **ঘ** তে

সাধারণ স্পর্শিনী **চঘ** হইতেছে,

এবং ∴ ঐ ⊙ দ্বয় **ঘ** তে পরস্পরকে স্পর্শ করিতেছে (২, উঃ প্রঃ ৯)।

৩। নির্দ্দিষ্ট ভূমি, উচ্চতা, এবং শীর্ষকোণশিষ্ট একটি ত্রিভুজ নির্ম্মাণ কর।

নির্দ্দিষ্ট ভূমি **কখ**'র উপর এরূপ একটি বৃত্তখণ্ড **কচখ** অঙ্কিত কর যাহাতে স্থিত ∠ = নির্দ্দিষ্ট ∠ **গ** (২, সঃ প্রঃ ৩)।

কঙ ⊥ কখ এবং = নির্দ্দিষ্ট উচ্চতা **ঘ** টান, এবং **ঙচ ∥ কখ** টান। তাহা হইলে **ঙচ** এবং বৃত্তখণ্ড **কচখ**'র ছেদবিন্দু **চ** ইষ্ট △এর শীর্ষবিন্দু হইবে, এবং **কচখ** ইষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

∵ ইষ্ট △ এব শীর্ষ ∠ = ∠ **গ**,

∴ △ এব শীর্ষবিন্দু অবশ্যই বৃত্তখণ্ড **কচখ** তে থাকিবে।

এবং ∵ ইষ্ট △ এর উচ্চতা | **ঘ** = **কঙ**,

∴ ইষ্ট △ এর শীর্ষবিন্দু অবশ্যই | **ঙচ** তে থাকিবে।

∴ তাহা অবশ্যই **কচখ** এবং **ঙচ**'ব ছেদবিন্দু **চ**।

৪। নির্দ্দিষ্ট ভূমি, নির্দ্দিষ্ট শীর্ষ কোণ, এবং নির্দ্দিষ্ট বাহুদ্বয়সমষ্টিবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কব।

নির্দ্দিষ্ট ভূমি **কখ**'ব উপব এরূপ একটি বৃত্তখণ্ড আঁক যাহাতে স্থিত ∠ = নির্দ্দিষ্ট শীর্ষকোণেব অর্দ্ধেক।

খ কে কেন্দ্র ও নির্দ্দিষ্ট বাহুদ্বয়ের সমষ্টিকে ব্যাসার্দ্ধ কবিয়া একটি ⊙ আঁক। বৃত্তদ্বয়েব ছেদবিন্দু **গ** কে **ক** এবং **খ**'র সহিত যোগ কব। এবং ∠ **গকঘ** = ∠ **কগঘ** অঙ্কিত কব। তাহা হইলে △ **কঘখ** ইষ্ট △ হইবে।

কারণ, তাহাব ভূমি **কখ**, তাহাব শীর্ষকোণ **কঘখ** = ∠ **কগখ** + ∠ **ঘকগ** = ২ ∠ **কগখ** = নির্দ্দিষ্ট ∠,

এবং তাহার বাহুদ্বয় = **কঘ** + **ঘখ** = **গঘ** + **ঘখ** (∵ ∠ **ঘগক** = ∠ **ঘকগ**, এবং ∴ **কঘ**=**গঘ**) =**খগ**=নির্দ্দিষ্ট বাহুদ্বয়সমষ্টি।

৬। নির্দ্দিষ্ট ভূমি, নির্দ্দিষ্ট শীর্ষকোণ, এবং নির্দ্দিষ্ট বাহুদ্বয়ের অন্তরবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কব।

নির্দ্দিষ্ট ভূমি **কখ**'ব উপব এরূপ একটি বৃত্তখণ্ড **কগখ** অঙ্কিত কব যাহাতে স্থিত কোণ = ∠ **ঘঙহ** অর্থাৎ = নির্দ্দিষ্ট শীর্ষ ∠ **ঘঙচ** + তাহার পবিপূরক কোণেব অর্দ্ধেক। **ক** কে কেন্দ্র ও নির্দ্দিষ্ট বাহুদ্বয়েব অন্তব **কগ** কে ব্যাসার্দ্ধ কবিয়া ⊙ আঁক।

বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু **গ** কে **ক** এবং **খ**'ব সহিত যোগ কর। এবং ∠ **গখঝ** = ∠ **খগঝ** অঙ্কিত কব। তাহা হইলে △ **কখঝ** ইষ্ট △ হইবে। তাহা সপ্রমাণ করাব ভাব বিদ্যার্থীব উপব বহিল।

৬। দুইটি নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের সাধারণ স্পর্শিনী টান।

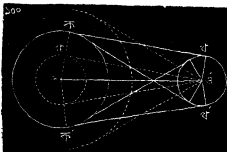
মনে কর **ও, ও´** বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র।

ওকে কেন্দ্র এবং বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্দ্ধের অন্তরকে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ অঙ্কিত কর, **ও´** হইতে তাহার স্পর্শিনী **ও´গ** টান, **ওগ** যোগ কর এবং বর্দ্ধিত করিয়া নির্দ্দিষ্ট ⊙ এর সহিত **ক**তে মিলিত কর। **ও´খ** ⊥ **ও´গ** টান, এবং **খক** যোগ কর। **খক** নির্দ্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের একটি সাধারণ স্পর্শিনী হইবে।

কারণ, **গক**=**ও´খ** এবং ‖ **ও´খ** (∵ **ওগ**=**ওক**−**ও´খ**, এবং **ওগ, ও´খ** ⊥ **ও´গ**),

∴ **খক**=**ও´গ** এবং ‖ **ও´গ** (১, উঃ প্রঃ ১৭, অনু ১),

এবং ∠ **ওগও´**=সম∠,

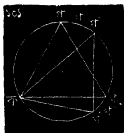
∴ ∠**ওকখ**=সম∠ (১, উঃ প্রঃ ৬)।

আবার, $\because$ **কখও´গ** একটি সামান্তরিক,

$\therefore$ $\angle$**ও´খক** = $\angle$**কগও´** = সম$\angle$।

$\therefore$ **কখ** উভয় ⊙এর স্পর্শিনী।

বিদ্যার্থী দেখিবেন, **খ´ক´** উভয় ⊙ এর আর একটি স্পর্শিনী।

ওকে কেন্দ্র এবং নির্দ্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্দ্ধের সমষ্টিকে ব্যাসার্দ্ধ করিয়া ⊙ অঙ্কিত করিয়া **ও´** হইতে সেই ○ এর স্পর্শিনী* টানিয়া, উপরের দর্শিত প্রণালী অবলম্বনে নির্দ্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের আর দুইটি সাধারণ স্পর্শিনী টানা যায়।

৭। কোন নির্দ্দিষ্ট বৃত্তে যত ত্রিভুজ অন্তবঙ্কিত করা যাইতে পারে তন্মধ্যে সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম।

মনে কর **কখগ** বৃত্তের অন্তর্বঙ্কিত সমবাহু △,
এবং (চিত্রে প্রদর্শিত নহে) **ক´খ´গ´** অন্তরঙ্কিত বিষমবাহু △।

△ **ক´খ´গ´**কে ⊙ মধ্যে সবাইয়া **ক´**কে **ক**'র উপর
স্থাপিত করিয়া **কখ´গ´** এইরূপে স্থাপিত করা যাইতে পাবে।

যদি **গ´**, চাপ **কগ´খ** এর মধ্যবিন্দু না হয়,
এবং **গ´´** যদি তাহার মধ্য বিন্দু হয়, তাহা হইলে
সহজেই সপ্রমাণ করা যায় যে

△**কগ´´খ´** > △**কগ খ´**।

মনে কর ○ = প, চাপ **খখ´** = অ।

তাহা হইলে চাপ **কখ´** = $\frac{১}{৩}$ প − অ, চাপ **কগগ´খ´** = $\frac{২}{৩}$ প + অ।

এবং চাপ **কগগ´´** = চাপ **খ´খগ´´** = $\frac{১}{৩}$প + $\frac{১}{২}$অ।

△**কগ´´খ´** আবার বর্দ্ধিত হইবে যদি **খ´**কে চাপ **কখ´গ´´**এর
মধ্যবিন্দু **খ´´**তে সরান যায়, এবং △**কখ´গ´´** এর

সমান বাহুর উপরের চাপ = $\frac{১}{৩}$প − $\frac{১}{২২}$অ,

ভূমির উপরের চাপ = $\frac{১}{৩}$প + $\frac{১}{২}$অ।

এইরূপে চলিলে, △ **কখ'গ'** ক্রমশঃ বর্দ্ধিত হইতে থাকিবে,
এবং তাহার সমান বাহুর উপরের ও ভূমির উপরের চাপ যথাক্রমে,

$\frac{১}{৩}প - \frac{১}{২^{২}}অ$ এবং $\frac{১}{৩}প + \frac{১}{২}অ$

$\frac{১}{৩}প + \frac{১}{২^{৩}}অ$ এবং $\frac{১}{৩}প - \frac{১}{২^{২}}$

$\frac{১}{৩}প \pm \frac{১}{২^{ন}}অ$ এবং $\frac{১}{৩}প \mp \frac{১}{২^{ন-১}}অ$, হইবে।

ন অযুগ্ম হইলে উপরের চিহ্ন
এবং যুগ্ম হইলে নিম্নের চিহ্ন গ্রহণীয়।
আর ন অসীমরূপে বর্দ্ধিত হইলে,
চাপগুলি $\frac{১}{৩}$**প**'র সন্নিহিত হইবে,
△ **কখ'গ'** সমবাহু ত্রিভুজ হইবে,
এবং তাহার পর আর বর্দ্ধিত হইবে না।

অনুশীলনার্থ উদাহরণ মালা।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১ ও ২ দ্রষ্টব্য।)

১। বৃত্তের যে সকল জ্যা কেন্দ্রগামী নহে তাহাদের সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব সমূহ এক বিন্দুমুখী।

২। বৃত্তের সমান্তর জ্যার সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব এক ঋজুরেখায় থাকিবে।

৩। দুটি বৃত্তের প্রত্যেকটিই দুই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইতেছে, এবং তন্মধ্যে বৃহত্তরটির কেন্দ্র অপর বৃত্তের পরিধিস্থিত। যদি ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাস ঐ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের সমান হয়, তাহা হইলে বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের বর্গ ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের বর্গের দ্বিগুণ হইবে।

৪। যদি কোন নির্দ্দিষ্ট তিন বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্র তন্মধ্যে দুই বিন্দুর যোজক ঋজুরেখায় থাকে, তাহা হইলে তৃতীয় বিন্দুতে সেই যোজকের বিপরীত কোণ সমকোণ।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৪ দ্রষ্টব্য।)

৫। যদি কোন সামান্তরিকের কোণবিন্দু বৃত্তপরিধিস্থিত হয়, তাহা হইলে সেই সামান্তরিক, আয়ত হইবে।

৬। বৃত্তের অন্তরঙ্কিত চতুর্ভুজ সমবাহু হইলে তাহা সমানকোণী হইবে।

৭। বৃত্তের সমুদয় সমান জ্যার মধ্য বিন্দু সমূহ তাহার সমকেন্দ্র বৃত্তান্তরে অবস্থিত। এবং সেই বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্দ্ধের বর্গের অন্তর সেই সমান জ্যার অর্দ্ধেকের বর্গের সমান।

৮। বৃত্ত মধ্যস্থ যে কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত যত ঋজুরেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে কেন্দ্রগামী রেখা বৃহত্তম এবং তাহার অপর ভাগটি ক্ষুদ্রতম। আর অন্যান্য রেখার মধ্যে বৃহত্তমের নিকটস্থ রেখা অপেক্ষাকৃত দূরস্থ রেখা হইতে বৃহত্তর।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৬ দ্রষ্টব্য।)

৯। যে কোন জ্যার উপর দণ্ডায়মান এবং জ্যার চাপস্থ যে কোন বিন্দু শীর্ষবিন্দু, এইরূপ ত্রিভুজ সমূহের মধ্যে যাহার শীর্ষ চাপের মধ্যবিন্দু সেই ত্রিভুজটি বৃহত্তম।

১০। বৃত্তে অন্তরঙ্কিত সমবাহু বহুভুজের বাহুর সম্মুখের কেন্দ্রস্থ সমস্ত কোণ সমান।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—৯ দ্রষ্টব্য।)

১১। ব্যাসের প্রান্তস্থিত স্পর্শিনীদ্বয় পরস্পর সমান্তর, এবং সেই ব্যাস যে সকল জ্যার সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব তাহাদেরও সমান্তর।

১২। বৃত্তের যে কোন স্পর্শিনীদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্দ্ধদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিপূরক।

১৩। বৃত্তের বাহিরের যে কোন বিন্দু হইতে টানা স্পর্শিনীদ্বয় সেই বিন্দুগামী ব্যাসের প্রান্তস্থ যে কোণদ্বয়ের সম্মুখীন তাহারা পরস্পর সমান।

১৪। বৃত্তের বহিরঙ্কিত চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুযুগলের সমষ্টিদ্বয় পরস্পর সমান।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—১১ দ্রষ্টব্য।)

১৫। একই ভূমির উপর একই সমান্তরের অন্তর্গত ত্রিভুজসমূহের মধ্যে যেটি সমদ্বিবাহু তাহারই শীর্ষকোণ বৃহত্তম।

১৬। বৃত্তের পরিধিস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে অন্তরঙ্কিত যে কোন ত্রিভুজের বাহুর উপর লম্ব টানিলে সেই তিন লম্বের পদত্রয় এক ঋজুরেখায় হইবে।

(উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১—১২ দ্রষ্টব্য)।

১৭। দুটি সম্পাতী বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শিনী টানিলে, বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের যোজক ঋজুরেখা স্পর্শিনীর স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশকে সমদ্বিখণ্ড করিবে।

১৮। যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করে, আর তাহাদের দুটি স্পর্শিনী টানা যায় ও তাহার একটি বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুগামী হয়, তাহা হইলে শেষোক্ত স্পর্শিনী অপর স্পর্শিনীর স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশকে সমদ্বিখণ্ড করিবে।

১৯। দুটি বৃত্ত পরস্পর বাহিরে স্পর্শ করিতেছে। তাহাদের ব্যাসার্দ্ধ ২ ইঞ্চ এবং ৪½ ইঞ্চ। তাহাদের একটি সাধারণ স্পর্শিনী টানা গিয়াছে। সেই স্পর্শিনীর স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশের পরিমাণ কত?

২০। একটি বৃত্তের ব্যাস ৫ ইঞ্চ। তাহার মধ্যে একটি ৩ ইঞ্চ জ্যা অঙ্কিত হইয়াছে। কেন্দ্র হইতে সেই জ্যার দূরত্ব কত?

তৃতীয় অধ্যায়।

সমানুপাতী আয়তন এবং সদৃশ ক্ষেত্র।

প্রথম পরিচ্ছেদ।

পরিভাষা।

উপক্রমণিকা। জ্যামিতিব আয়তনেব দুটি গুণ আলোচ্য বিষয়, **স্থান** ও **মান**।

আয়তনের, অর্থাৎ রেখা, কোণ, ও ত্রিভুজ প্রভৃতি ক্ষেত্রের, মানের কেবল একপ্রকার সম্বন্ধ এ পর্য্যন্ত আলোচিত হইয়াছে, অর্থাৎ মানেব **সাম্য** ও **বৈষম্য**। কিন্তু সাম্য ও বৈষম্য ব্যতীত আয়তনের মানের আর একপ্রকার সম্বন্ধ আছে যাহাকে **সমানুপাতত্ব** বলা যায়। সে সম্বন্ধও এক প্রকার সাম্য, কিন্তু সে সাম্য আয়তনদিগের **নিজের** সাম্য নহে, তাহাদের **পরস্পরের মানবিষয়ক সম্বন্ধের** সাম্য।

যথা, যদি দুটি অসমান ত্রিভুজের একটির কোণত্রয় অপরটির কোণত্রয়ের সহিত যথাক্রমে সমান হয়, একের কোন এক কোণসংলগ্ন বাহুযুগল ও অপরের তৎসমান কোণসংলগ্ন বাহুযুগল পরস্পর অসমান হইলেও প্রথমোক্ত বাহুদ্বয়ের পরস্পরের দৈর্ঘ্যের সম্বন্ধ দ্বিতীয়োক্ত বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সম্বন্ধের সহিত সমান, এবং এই কথা এই অধ্যায়ের তৃতীয় উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় সপ্রমাণ করা যাইবে।

তথা, বাহুর দৈর্ঘ্যের সহিত কর্ণের দৈর্ঘ্যের সম্বন্ধ, দুটি অসমান বর্গক্ষেত্রেও সমান।

মান বিষয়ক ঐরূপ সম্বন্ধকে **অনুপাত** বলে, এবং দুই অনুপাতের সাম্যকে **সমানুপাত** বলে।

পরিভাষা ১। দুটি একপ্রকারের আয়তনের পরিমাণের সম্বন্ধকে **অনুপাত** বলে, এবং প্রথমটি দ্বিতীয়টির কত গুণ বা কত ভাগ তাহাই অনুপাত সম্বন্ধের বিবেচ্য বিষয়।

২। চারিটি আয়তনের মধ্যে প্রথমটির সহিত দ্বিতীয়টির অনুপাত সম্বন্ধ যদি তৃতীয়ের সহিত চতুর্থের অনুপাত সম্বন্ধের সমান হয়, তাহা হইলে ঐ চারিটি আয়তনের মধ্যে **সমানুপাত** আছে, এবং আয়তন চতুষ্টয় **সমানুপাতী**, বলা যায়।

৩। যদি তিনটি আয়তন ক্রমান্বয়ে সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে প্রথম ও তৃতীয়ের অনুপাতকে প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাতের **দ্বিঘাত** বা **দ্বিগুণ অনুপাত** বলে, এবং দ্বিতীয় আয়তনকে প্রথম ও তৃতীয়ের **মধ্য সমানুপাতী** বলে।

৪। সমানুপাতীদিগের মধ্যে অনুপাতের পূর্ব্ব পদগুলিকে তথা পরপদ-গুলিকে পরস্পরের **সমভাবী** বা **সমশীল** বলে।

৫। যে ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রদ্বয়ের একের কোণগুলি অপরের কোণের সহিত যথাক্রমে সমান, এবং একের প্রত্যেক কোণসংলগ্ন বাহুযুগল ও অপরের তৎসমান কোণসংলগ্ন বাহুযুগল সমানুপাতী, তাহাদিগকে **সদৃশ ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র** বলে।

টিপ্পনী ১। উপরে উক্ত পরিভাষার কিঞ্চিৎ ব্যাখ্যা আবশ্যক হইতে পারে।

যদি **ক** ও **খ** দুইটি আয়তনের পরিমাণ বা দুইটি রাশি হয়, তাহা হইলে তাহাদের অনুপাত

ক　খ

এইরূপ লিখিত হয়। এবং অনুপাতের অর্থানুসারে

$$ক : খ = \frac{ক}{খ}, \text{ এই ভগ্নাংশ।}$$

কারণ, ক : খ এবং $\frac{ক}{খ}$ উভয়েই **ক, খ'র** কত গুণ বা কত ভাগ, তাহাই বুঝায়।

যদি ক . খ :: গ ঘ,

তাহা হইলে $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$ ।

এবং এই শেষোক্ত সমীকরণ হইতে অনেকগুলি সমীকরণ পাওয়া যায়। তাহা বীজগণিতের গ্রন্থে আলোচিত হইয়া থাকে, এবং এই সরল গণিতের দ্বিতীয় ভাগে বীজগণিতের অষ্টম অধ্যায়ে সে সকল বিষয় আলোচিত হইয়াছে। অতএব এখানে তাহার পুনরুক্তি নিষ্প্রয়োজন। তবে বিদ্যার্থীর সুবিধার নিমিত্ত সেই আলোচনার ফল নিম্নে সজ্ক্ষেপে লিপিবদ্ধ করা গেল।

যদি ক খ :: গ ঘ

অর্থাৎ $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$, তাহা হইলে

(১) $\frac{খ}{ক} = \frac{ঘ}{গ}$ বিপর্য্যয় ক্রমে)।

(২) $\frac{ক}{গ} = \frac{খ}{ঘ}$ (একান্তরক্রমে)।

(৩) $\frac{ক+খ}{খ} = \frac{গ+ঘ}{ঘ}$ (যোগ ক্রমে।

(৪) $\frac{ক-খ}{খ} = \frac{গ-ঘ}{ঘ}$ (বিয়োগ ক্রমে)।

টিপ্পনী ২। যদি $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$,

তাহা হইলে **কঘ = খগ**।

এবং যদি ক, খ, গ, ঘ চারিটি ঋজুরেখার দৈর্ঘ্য হয়,

তাহা হইলে কঘ = ক এবং ঘ'র অন্তর্গত আয়তের ক্ষেত্রফল,

খগ = খ এবং গ'র " "।

(১, উঃ প্রঃ ২০, টিপ্পনী।১, ২ দ্রষ্টব্য)

অতএব **যদি চারিটি ঋজুরেখা সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে প্রথম ও চতুর্থের অন্তর্গত আয়ত, দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।**

টিপ্পনী ৩। অনুপাত শব্দ উপরে যে অর্থে ব্যবহার করা গিয়াছে তাহাতে মানিয়া লওয়া হইয়াছে যে, যে সকল আয়তনের অনুপাতের কথা বলা হইল তাহারা সংখ্যাদ্বারা পরিমেয়। কিন্তু এরূপ আয়তন অনেক আছে যাহা সসীম সংখ্যাদ্বারা ঠিক পরিমেয় নহে। যথা, মনে কর একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ৩ ইঞ্চ, অর্থাৎ ১ ইঞ্চকে মাপের একক বলিয়া লইলে সেই দৈর্ঘ্য ৩ এই সংখ্যাদ্বারা প্রকাশ করা যায়। তাহা হইলে সেই বর্গক্ষেত্রের কর্ণ= $\sqrt{৩^২+৩^২}$ ইঞ্চ $=\sqrt{২\times৩^২}$ ইঞ্চ $=\sqrt{২}\times৩$ ইঞ্চ। কিন্তু $\sqrt{২}$ এর মূল্য কোন সসীম সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায় না। বলা যাইতে পারে বটে $\frac{\text{বর্গক্ষেত্রের কর্ণ}}{\text{বর্গক্ষেত্রের বাহু}}=\sqrt{\frac{২}{১}}=\sqrt{২}$, অতএব এই অনুপাতের মূল্য $\sqrt{২}$, কিন্তু তাহা কেবল কথা মাত্র, কারণ $\sqrt{২}$ এর মূল্য কত তাহা সসীম অঙ্কদ্বারা প্রকাশ্য নহে। তবে বর্গমূল আকর্ষণের প্রক্রিয়া চালাইলে, ক্রমশঃ ২ এর বর্গমূলের দশমিকের ঘর যত সংখ্যায় বৃদ্ধি হইতে থাকিবে, লব্ধ বর্গমূল ততই প্রকৃত মূলের সন্নিহিত হইতে থাকিবে। এবং দেখ, মাপের একক ১ ইঞ্চ লইলে যদিও ৩ ইঞ্চ বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য ইঞ্চ দ্বারা ঠিক প্রকাশ করা যায় না, $\frac{১}{১০০০০০০}$ ইঞ্চ বা $\frac{১}{১০০০০০০০}$ ইঞ্চ অথবা ১ ইঞ্চের আরও ক্ষুদ্রতর ভাগ একক বলিয়া লইলে, সংখ্যা দ্বারা ঐ ক্ষেত্রের কর্ণের পরিমাণ সম্পূর্ণ ঠিকরূপে না হউক প্রায় ঠিকরূপে প্রকাশ করা যায়। একথা পূর্ব্বে ১ম অধ্যায়ের ২১ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার ২ টিপ্পনীতে বলা হইয়াছে। এইরূপে, সংখ্যাদ্বারা অপরিমেয় আয়তন বা রাশির ঠিক মূল্য সসীম সংখ্যাদ্বারা প্রকাশ যোগ্য না হইলেও, যতদূর ইচ্ছা তাহার সন্নিহিত মূল্য সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়, এবং তাহাতে যে অতি অল্প ভুল থাকে তাহা ধর্ত্তব্য হয় না। অতএব এই ভাবে দেখিলে, **কার্য্যতঃ** সকল আয়তন বা রাশি সংখ্যা দ্বারা পরিমেয় মনে করা যাইতে পারে।

টিপ্পনী ৪। যদি তিনটি আয়তন বা রাশি ক্রমান্বয়ে সমানুপাতী হয়, যথা

ক : খ খ গ,

অর্থাৎ $\frac{ক}{খ}=\frac{খ}{গ}$, তাহা হইলে

$$\frac{ক}{গ}=\frac{ক}{খ}\times\frac{খ}{গ}=\frac{ক}{খ}\times\frac{ক}{খ}=\frac{ক^২}{খ^২}।$$

অতএব উপরে ৩ পরিভাষায় যে দ্বিঘাত বা দ্বিগুণ অনুপাতের কথা বলা হইয়াছে তাহা অনুপাতী রাশিদ্বয়ের বর্গের অনুপাত।

টিপ্পনী ৫। পূর্ব্ববর্ত্তী অধ্যায়দ্বয়ে যেমন এ অধ্যায়েতেও তেমনই, যে সকল বিন্দু, রেখা, কোণ, ও ক্ষেত্রের কথা আছে তাহা সমস্ত এক সমতলস্থ বলিয়া মানিয়া লইতে হইবে।

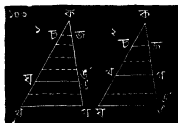
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা।

১। ত্রিভুজের ভুমির সমান্তর দ্বারা বাহু-দ্বয়ের বিভাগ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

১। যদি ত্রিভুজের কোন এক বাহুর সমান্তর ঋজুরেখা টানা যায়, তাহা হইলে তদ্দ্বারা অপর বাহুদ্বয় যে খণ্ড চতুষ্টয়ে বিভক্ত হয় তাহারা সমানুপাতী হইবে।

২। পরিবৃত্তক্রমে, যদি কোন ঋজুরেখা ত্রিভুজের দুই বাহুকে সমানুপাতী খণ্ড চতুষ্টয়ে বিভক্ত করে, তাহা হইলে সেই রেখা ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তর হইবে।

১। △ **কখগ** তে মনে কর **ঘঙ** ॥ **খগ**,
এবং **ঘঙ**, **কখ** কে ১ম চিত্রে,
ও **কখ**'র বর্দ্ধিত ভাগকে ২য় চিত্রে,
ঘ এবং **ঙ** তে ছেদ করিতেছে।

তাহা হইলে $\frac{\text{কঘ}}{\text{ঘখ}} = \frac{\text{কঙ}}{\text{ঙগ}}$ ।

মনে কর **কঘ** ও **ঘথ**'র সাধারণ গুণনীয়ক **কচ**,

এবং **কঘ**=ম×**কচ**, **ঘথ**=ন×**কচ**।

কঘ ও **ঘথ**কে ম ও ন সমান ভাগে ভাগ করিয়া,

ছেদবিন্দু দিয়া ঋঃ রেঃ ॥ **থগ** টান,

তাহা হইলে সেই ঋঃ রেঃ **কঙ**কে ম সংখ্যক, **ঙগ**কে ন সংখ্যক সমান ভাগে বিভক্ত করিবে (১, উঃ প্রঃ ১৭, অমুঃ ৩)।

∴ **কঙ**=ম×**কজ**, **ঙগ**=ন×**কজ**।

এবং∴ $\frac{\text{কঘ}}{\text{ঘথ}}=\frac{\text{ম}\times\text{কচ}}{\text{ন}\times\text{কচ}}=\frac{\text{ম}}{\text{ন}}=\frac{\text{ম}\times\text{কজ}}{\text{ন}\times\text{কজ}}=\frac{\text{কঙ}}{\text{ঙগ}}$।

২। প্রতিজ্ঞার দ্বিতীয় ভাগ সপ্রমাণ করণার্থে,

যদি **ঘঙ** ॥ **থগ** না হয়, মনে কর **ঘঙ'** ॥ **থগ**।

তাহা হইলে $\frac{\text{কঘ}}{\text{ঘথ}}=\frac{\text{কঙ}'}{\text{ঙ}'\text{গ}}=\frac{\text{কঙ}}{\text{ঙগ}}$ (কল্পনা মতে)।

∴ $\frac{\text{কঙ}'\pm\text{ঙ}'\text{গ}}{\text{ঙ}'\text{গ}}=\frac{\text{কঙ}\pm\text{ঙগ}}{\text{ঙগ}}$, অর্থাৎ $\frac{\text{কগ}}{\text{ঙ}'\text{গ}}=\frac{\text{কগ}}{\text{ঙগ}}$।

∴ **ঙ'গ**=**ঙগ**, সুতরাং **ঙ'** ও **ঙ** ভিন্ন নহে।

এবং ∴ **ঘঙ** ॥ **থগ**।

টিপ্পনী ১। এই প্রতিজ্ঞায় প্রদর্শিত প্রমাণ প্রণালী অবলম্বনে সপ্রমাণ করা যাইতে পারে যে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে যে কোন বৃত্তচ্ছেদকের চাপের যে কোন বিন্দুতে ঋজুরেখা টানিলে, সেই রেখা বৃত্তচ্ছেদকের চাপকে ও কেন্দ্রস্থ কোণকে সমানুপাতে বিভক্ত করিবে।

কারণ, সেই রেখা বৃত্ত ছেদকের কোণকে যে দুই ভাগে বিভক্ত করে, সেই কোণদ্বয়ের সাধারণ গুণনীয়ক একটি ক্ষুদ্র কোণ লইয়া সেই পরিমাণ সমানভাগে উক্ত কোণদ্বয়কে বিভক্ত করিলে, দেখা যাইবে সেই কোণদ্বয়, এবং তাহারা যে যে চাপের উপর দণ্ডায়মান সেই চাপদ্বয়, সমান সমান ভাগে বিভক্ত হইবে, কেন না সমান সমান কোণ সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান থাকে। সুতরাং প্রথমোক্ত রেখাদ্বারা কেন্দ্রস্থ কোণ যে অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে চাপও ঠিক সেই অনুপাতে বিভক্ত হইবে।

টিপ্পনী ২। ঐরূপ প্রমাণ প্রণালী অবলম্বনে সপ্রমাণ করা যাইতে পারে যে, সমান উচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজদ্বয় ও তাহাদের ভূমিদ্বয় সমানুপাতী, কারণ সমান উচ্চতা বিশিষ্ট ও সমান ভূমির উপরিস্থিত ত্রিভুজ সমান। (১, উঃ প্রঃ ২০, অনুঃ ২ দ্রষ্টব্য)।

২। শীর্ষকোণ সমদ্বিখণ্ডকারী রেখাদ্বারা ত্রিভুজের ভূমি বিভাগ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২০।

১। যদি কোন ঋজুরেখা ত্রিভুজের শীর্ষ-কোণকে অথবা তৎসন্নিহিত বাহিরের কোণকে সমান দুইখণ্ড করে, তবে সেই রেখা ত্রিভুজের ভূমিকে অন্তরে অথবা বাহিরে বাহুদ্বয়ের অনুপাতে দ্বিখণ্ড করিবে।

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, যদি ত্রিভুজের শীর্ষকোণ হইতে ভূমি পর্য্যন্ত টানা কোন ঋজুরেখা ভূমিকে অন্তরে অথবা বাহিরে বাহুদ্বয়ের অনুপাতে দ্বিখণ্ড করে, তবে সেই রেখা শীর্ষকোণকে অথবা তৎসন্নিহিত বাহিরের কোণকে সমান দ্বিখণ্ড করিবে।

মনে কর **কঘ** সমান দুইখণ্ড করিতেছে
△ **কখগ**'র শীর্ষ ∠**খকগ**'কে (১ম চিত্রে)
বা তৎসন্নিহিত বাহিরের ∠**খ'কগ**'কে (২য় চিত্রে)।

তাহা হইলে $\frac{\text{খঘ}}{\text{গঘ}} = \frac{\text{খক}}{\text{গক}}$।

গঙ ‖ **কঘ** টান।

তাহা হইলে ∠কঙগ = ∠খকঘ বা ∠খ´কঘ (১, উঃ প্রঃ ৬)
= ∠গকঘ (কল্পনানুসারে)
= ∠কগঙ (১, উঃ প্রঃ ৫)।

∴ গক = ঙক। (১, উঃ প্রঃ ৯)।

আবার ∵ কঘ ‖ গঙ,

$$\therefore \quad \frac{\text{খঘ}}{\text{গঘ}} = \frac{\text{খক}}{\text{ঙক}} \text{ (৩, উঃ প্রঃ ১) } = \frac{\text{খক}}{\text{গক}}।$$

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, মনে কর, $\frac{\text{খঘ}}{\text{গঘ}} = \frac{\text{খক}}{\text{গক}}$,

তাহা হইলে ∠খকঘ বা ∠খ´কঘ = ∠গকঘ।

গঙ ‖ কঘ টান।

তাহা হইলে $\frac{\text{খঘ}}{\text{গঘ}} = \frac{\text{খক}}{\text{ঙক}}$ (৩, উঃ প্রঃ ১)

$= \frac{\text{খক}}{\text{গক}}$ (কল্পনানুসারে)।

∴ ঙক = গক, ∴ ∠কগঙ = ∠কঙগ।

কিন্তু ∠কঙগ = ∠খকঘ বা ∠খ´কঘ,

এবং ∠কগঙ = ∠গকঘ (১, উঃ প্রঃ ৬ ও ৫)।

∴ ∠গকঘ = ∠খকঘ বা ∠খ´কঘ।

টিপ্পনী ১। যদি খক = গক, ∠খগক = ∠গখক,
এবং ∠খ´কগ = ২ × ∠কগখ। সুতরাং ∠গকঘ = ∠কগখ,
এবং ∴ কঘ ‖ খগ, অতএব ঘ অনন্ত দূরে। তবে
সেই স্থলেও এই প্রতিজ্ঞার সত্যতা এই ভাবে দেখিলে বজায় থাকে, যথা

$$\frac{\text{খক}}{\text{গক}} = \frac{\text{খগ} + \infty}{\infty},$$

কারণ, খক = গক,

এবং খগ + ∞ = ∞ ,

কেন না অনন্তের সহিত তুলনায় খগ কিছুই নহে,
এবং অনন্তের সহিত খগ যোগ করিলে অনন্ত, অনন্তই থাকে।

টিপ্পনী ২। যদি কঁঘ এবং কঙ ∠খকগ, এবং ∠খ'কগ কে সমান দুই খণ্ড করে, তাহা হইলে তাহারা খঙ কে লয় ক্রমে ছেদ করে, অর্থাৎ এরূপে ছেদ করে যে, সমস্ত রেখা ও তাহার এক প্রান্তের খণ্ডের যে অনুপাত, অপর প্রান্তের খণ্ড ও মধ্য খণ্ডের ঠিক সেই অনুপাত।

এবং খঘ, খগ, খঙ এই রেখাত্রয় লয় শ্রেঢ়ীর তিনটি পর পর পদ।

কারণ, $\frac{খঙ}{গঙ} = \frac{খক}{গক} = \frac{খঘ}{গঘ}$,

$\therefore \frac{খঙ}{খঘ} = \frac{গঙ}{গঘ}$ (একান্তর ক্রমে)।

আবার $\frac{খঙ}{খঘ} = \frac{গঙ}{গঘ} = \frac{খঙ - খগ}{খগ - খঘ}$

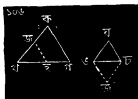
অথবা, $\frac{খঘ}{খঙ} = \frac{খগ - খঘ}{খঙ - খগ}$।

দেখা গিয়াছে যে, যদি বাদ্য যন্ত্রের তিনটি তার, একই পদার্থে নির্ম্মিত, সমান মোটা, এবং সমান জোরে কসা হয়, এবং যদি তাহাদের দৈর্ঘ্য খঘ, খগ, ও খঙ'র অনুপাতী হয়, তবে ধ্বনিত হইলে তাহারা যে যে সুরে বাজে তাহা লয় মত ও অতি সুশ্রাব্য। এই জন্য এইরূপে সম্বদ্ধ রেখাত্রয়কে লয় শ্রেঢ়ীতে আবদ্ধ বলে।

৩। সদৃশ ত্রিভুজ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩।

১। যদি দুটি ত্রিভুজ সমান কোণী হয়, তাহাদের সমান কোণের লগ্ন বাহুগুলি যথাক্রমে সমানুপাতী হইবে। এবং ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।

২। পরিবৃত্তক্রমে, যদি দুটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে সমানুপাতী হয়, তাহাদের সমশীল বা সমবর্ত্তী বাহুর সম্মুখীন কোণগুলি সমান হইবে। এবং ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।

মনে কর △ **কখগ** ও △ **ঘঙচ**'র,

∠ **ক** = ∠ **ঘ**, ∠ **খ** = ∠**ঘঙচ**, ∠ **গ** = ∠ **ঘচঙ**।

তাহা হইলে　　$\frac{কখ}{ঘঙ} = \frac{খগ}{ঙচ} = \frac{গক}{চঘ}$।

△ **ঘঙচ** কে △**কখগ**'র উপর এরূপে স্থাপিত কর যে,

ঙ, **খ**'র উপর পড়ে, এবং **ঙঘ**, **খক**'র উপর পড়ে,

তাহা হইলে **ঙচ**, **খগ**'র উপর পড়িবে, ∵ ∠ **ঘঙচ** = ∠ **খ**।

মনে কর **ঘ** ও **চ**, **জ** ও **হ**' তে পড়িয়াছে। **জ**, **হ** যোগ কর।

তাহা হইলে, ∵ ∠**খজহ** = ∠**ঘ** = ∠**ক**, ∴ **জহ** ‖ **কগ**

(১, উঃ প্রঃ ৬)।

এবং ∴ $\frac{\text{খজ}}{\text{কজ}}=\frac{\text{খহ}}{\text{গহ}}$, ∴ $\frac{\text{কজ}}{\text{খজ}}=\frac{\text{গহ}}{\text{খহ}}$ (বিপর্য্যয়ক্রমে)।

∴ $\frac{\text{কখ}}{\text{খজ}}=\frac{\text{খগ}}{\text{খহ}}$ (যোগক্রমে)।

কিন্তু খজ=ঙঘ, খহ=ঙচ,

∴ $\frac{\text{কখ}}{\text{ঘঙ}}=\frac{\text{খগ}}{\text{ঙচ}}$।

এবং সেইরূপে $\frac{\text{খগ}}{\text{ঙচ}}=\frac{\text{গক}}{\text{চঘ}}$।

সুতরাং △ কখগ ও △ ঘঙচ সদৃশ।

২। পরিবৃত্ত ক্রমে, মনে কর,

$$\frac{\text{কখ}}{\text{ঘঙ}}=\frac{\text{খগ}}{\text{ঙচ}}=\frac{\text{গক}}{\text{চঘ}}।$$

তাহা হইলে ∠ক=∠ঘ, ∠খ=∠ঘঙচ, ∠গ=∠ঙচঘ।

ঙ তে ও চ তে, ∠চঙজ´ ও ∠ঙচজ´=∠খ ও ∠গ অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে ∠জ´=∠ক (১, উঃ প্রঃ ৮)।

অতএব △কখগ ও △ জ ঙচ সমান কোণী, এবং সদৃশ।

$$\frac{\text{কখ}}{\text{জ´ঙ}}=\frac{\text{খগ}}{\text{ঙচ}}=\frac{\text{কখ}}{\text{ঘঙ}} \text{ (কল্পনানুসারে)},$$

∴ জ´ঙ=ঘঙ।

সেইরূপে জ´চ=ঘচ। এবং ঙচ, △ঘঙচ, △ জ´ঙচ'তে আছে।

∴ △ ঘঙচ ও △জ´ঙচ সর্ব্বাংশে সমান,

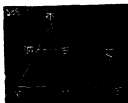
এবং ∴ ∠ঘঙচ=∠জ´ঙচ=∠খ,

∠ঘচঙ=∠জ´চঙ=∠গ,

∠ ঘ=∠জ´ =∠ক।

সুতরাং △ কখগ ও △ঘঙচ সদৃশ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৪।

যদি একটি ত্রিভুজের একটি কোণ আর একটি ত্রিভুজের একটি কোণের সমান হয়, এবং সেই সমান সমান কোণের সংলগ্ন বাহুগুলি যথাক্রমে সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।

মনে কর △ **কখগ** ও △ **ঘঙচ** তে

$\angle$**ক**$=\angle$**ঘ**, এবং $\frac{\text{কখ}}{\text{ঘঙ}}=\frac{\text{কগ}}{\text{ঘচ}}$।

তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে।

△ **ঘঙচ**কে △ **কখগ**'র উপর এরূপে স্থাপিত কর যে,

ঘ, **ক**'র উপর পড়ে, এবং **ঘঙ**, **কখ**'র উপর পড়ে,

তাহা হইলে **ঘচ**, **কগ**'র উপর পড়িবে, ∵ $\angle$**ঘ**$=\angle$**ক**।

মনে কর **ঙ** ও **চ**, **জ** ও **হ**'তে পড়িয়াছে। **জ**, **হ** যোগ কর।

তাহা হইলে ∵ **কজ** = **ঘঙ**, **কহ** = **ঘচ**,

এবং $\frac{\text{কখ}}{\text{ঘঙ}}=\frac{\text{কগ}}{\text{ঘচ}}$,

∴ $\frac{\text{কখ}}{\text{কজ}}=\frac{\text{কগ}}{\text{কহ}}$,

এবং ∴ $\frac{\text{খজ}}{\text{কজ}}=\frac{\text{গহ}}{\text{কহ}}$ (বিয়োগক্রমে)।

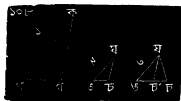
∴ **জহ** ॥ **খগ** (৩, উঃ প্রঃ ১)।

∴ ∠**খ** = ∠**কজহ** = ∠**ঙ** (১, উঃ প্রঃ ৬),

এবং ∴ ∠**গ** = ∠**চ**। (১, উঃ প্রঃ ৮)।

∴ △ **কখগ** ও △ **ঘঙচ** সমান কোণী ও সদৃশ (৩, উঃ প্রঃ ৩)

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩।

যদি একটি ত্রিভুজের একটি কোণ আর একটি ত্রিভুজের একটি কোণের সমান হয়, এবং তাহাদের একের আর একটি কোণের সংলগ্ন বাহুযুগল অপরের আর একটি কোণের সংলগ্ন বাহুযুগলের সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে তাহাদের তৃতীয় কোণ সমান হইবে, অথবা পরস্পরের পরিপূরক হইবে।

মনে কর △ **কখগ** ও △ **ঘঙচ** তে

$$\angle \text{খ} = \angle \text{ঙ}, \text{ এবং } \frac{\text{খক}}{\text{ঙঘ}} = \frac{\text{গক}}{\text{চঘ}},$$

তাহা হইলে ∠**গ** = ∠**ঘচঙ** বা 　　= ∠**ঘচঙ**'র পরিপূরক।

যদি ∠**ক** = ∠**ঙঘচ**, তবে ∠**গ** = ∠**ঘচঙ**

(১, উঃ প্রঃ ৮)।

যদি ∠**ক** = ∠**ঙঘচ** না হয়,

তবে ∠**ঙঘচ′** = ∠**ক** অঙ্কিত কর (৩য় চিত্রে)।

তাহা হইলে △ **কখগ** ও △ **ঘঙচ′** সমান কোণী এবং ∴ সদৃশ হইবে।

∴ $\angle$ গ = $\angle$ ঘচ′ঙ,

এবং, $\frac{\text{খক}}{\text{ঙঘ}} = \frac{\text{গক}}{\text{চ′ঘ}} = \frac{\text{গক}}{\text{চঘ}}$ (কল্পনানুসারে)।

∴ চ′ঘ = চঘ, ∴ $\angle$ চ = $\angle$ ঘচ′চ
= $\angle$ ঘচ′ঙ’র পরিপূরক
= $\angle$ গ’র পরিপূরক।

টিপ্পনী। উপরের ৩, ৪, ও ৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ত্রিভুজের সাদৃশ্য বিষয়ক। ছুটি ত্রিভুজের সাদৃশ্য নিম্নলিখিত কএকটি স্থলে ঘটিতে পারে।

১। যদি ত্রিভুজদ্বয় সমান কোণী হয়, তাহারা সদৃশ। এ কথা উপরে ৩য় উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় সপ্রমাণ করা হইয়াছে। ত্রিভুজদ্বয়ের সাম্য সম্বন্ধে ইহার অনুরূপ স্থল নাই।

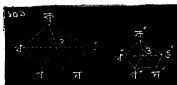
২। যদি ত্রিভুজদ্বয়ের বাহুগুলি যথাক্রমে সমানুপাতী হয়, তাহা হইলেও ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। একথাও উপরে ৩য় উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় সপ্রমাণ করা হইয়াছে। ত্রিভুজদ্বয়ের সাম্য সম্বন্ধে ইহার অনুরূপ স্থল ১ম অধ্যায়ের ১৩ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা।

৩। যদি ত্রিভুজদ্বয়ের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান হয়, এবং একের সেই কোণ সংলগ্ন বাহুযুগল অপরের তৎসমান কোণসংলগ্ন বাহুযুগলের সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে। একথা উপরে ৪ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় সপ্রমাণ করা হইয়াছে। ত্রিভুজের সাম্য সম্বন্ধে ইহার অনুরূপ স্থল ১ম অধ্যায়ের ১২ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা।

৪। যদি ত্রিভুজদ্বয়ের একটির একটি কোণ অপরটির একটি কোণের সমান হয়, এবং একের আর একটি কোণসংলগ্ন বাহুযুগল অপরের আর একটি কোণ সংলগ্ন বাহু যুগলের সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হইবে, অথবা একের তৃতীয় কোণ অপরের তৃতীয় কোণের পরিপূরক হইবে। একথা উপরে ৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় সপ্রমাণ করা হইয়াছে। ত্রিভুজের সাম্য সম্বন্ধে ইহার অনুরূপ স্থল ১ম অধ্যায়ের ১৫ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা।

৪। সদৃশ বহুভুজ ও ত্রিভুজ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৬।

যদি কোন বহুভুজের মধ্যস্থিত কোন বিন্দু তাহার কোণবিন্দুর সহিত যোগ করিয়া তাহাকে কতকগুলি ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়, তাহা হইলে তৎসদৃশ অপর যে কোন বহুভুজকে তদনুরূপ সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত করা যাইতে পারে।

মনে কর বহুভুজ **কখগঘঙ**, বিন্দু **ও** হইতে তাহার কোণে টানা | দ্বারা, △ এতে বিভক্ত হইয়াছে,

এবং মনে কর **ক´খ´গ´ঘ´ঙ´** একটি তৎসদৃশ বহুভুজ।

তাহা হইলে **ক´খ´গ´ঘ´ঙ´** ও সেইরূপে ততগুলি তৎসদৃশ △ এ বিভক্ত হইতে পারে।

ক´ এবং **খ´** এতে ∠**খ´ক´ও´** এবং ∠**ক´খ´ও´**=∠**খকও** এবং ∠**কখও** অঙ্কিত কর। এবং **ও´গ´**, **ও´ঘ´**, **ও´ঙ´** যোগ কর।

তাহা হইলে △**ওকখ** এবং △**ও´ক´খ´** স্পষ্ট দেখা যাইবে সমান কোণী।

$\therefore$ $\frac{\text{ওখ}}{\text{ও´খ´}}=\frac{\text{কখ}}{\text{ক´খ´}}$ (৩, উঃ প্রঃ ৩) $=\frac{\text{খগ}}{\text{খ´গ´}}$, $\because$ বহুভুজদ্বয় সদৃশ।

এবং $\because$ ∠**কখগ**=∠**ক´খ´গ´**, আর ∠**কখও**=∠**ক´খ´ও´**,

$\therefore$ ∠**ওখগ**=∠**ও´খ´গ´** (স্বতঃ সিদ্ধ ৩)।

$\therefore$ △**ওখগ** এবং △**ও´খ´গ´** সদৃশ (৩, উঃ প্রঃ ৪)।

ঐরূপে দেখা যাইবে, **ওগঘ, ওঘঙ, ওঙক,** ত্রিভুজত্রয় যথাক্রমে **ও'খ'ঘ', ও'ঘ'ঙ', ও'ঙ'ক'** ত্রিভুজত্রয়ের সদৃশ।

টিপ্পনী। যদি বিন্দু **ও** বহুভুজের কোণ **ক** তে থাকে, তাহা হইলে প্রতিজ্ঞাটি নিম্ন লিখিত প্রকারে সপ্রমাণ করা যাইতে পারে।

ক', গ', এবং **ক', ঘ'** যোগ কর।

তাহা হইলে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে △**কখগ** এবং △**ক'খ'গ'** সদৃশ।

(৩, উঃ প্রঃ ৪)।

এবং উপরের প্রদর্শিত প্রণালী অবলম্বনে প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে যে, △**কগঘ,** △**ক'গ'ঘ',** এবং △**কঘঙ,** △**ক'ঘ'ঙ'** সদৃশ।

অনুমান। এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে নির্দ্দিষ্ট | **ক'খ'** এর উপর নির্দ্দিষ্ট বহুভুজ **কখগঘঙ**'র সদৃশ বহুভুজ অঙ্কিত করিতে পারা যায়।

কারণ, | **ক'খ'** এর উপর △ **কখগ**'র সমান কোণী △ **ক'খ'গ'** অঙ্কিত কর (১, সঃ প্রঃ ২ এর সাহায্যে), **ক'গ'** এর উপর △ **কগঘ**'র সমান কোণী △ **ক'গ'ঘ'** অঙ্কিত কর, এবং **ক'ঘ'** এর উপর △ **কঘঙ**'র সমান কোণী △ **ক'ঘ'ঙ'** অঙ্কিত কর। তাহা হইলে **ক'খ'গ'ঘ'ঙ'** ইষ্ট বহুভুজ হইবে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৭।

একটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের কোণ বিন্দুর সহিত কোন একটি বিন্দুর যোজক ঋজুরেখাগুলি যদি একই অনুপাতে বাহিরে বা ভিতরে বিভক্ত করা যায়, তাহা হইলে সেই বিভাগ বিন্দুগুলি আর একটি সদৃশ, এবং সমভাবে স্থিত ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের কোণ বিন্দু হইবে।

মনে কর **কখগঘ** একটি ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র,

এবং **ওক, ওখ, ওগ, ওঘ, ক', খ', গ', ঘ'**এতে, বাহিরে বা ভিতরে, একই অনুপাতে বিভক্ত হইয়াছে।

তাহা হইলে **কখগঘ** এবং **ক'খ'গ'ঘ'** সদৃশ ও সমভাবে স্থিত ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র হইবে।

কারণ, ∵ $\frac{\text{ওক}}{\text{ওক}'} = \frac{\text{ওখ}}{\text{ওখ}'} = \frac{\text{ওগ}}{\text{ওগ}'}$,

∴ **কখ ॥ ক'খ', খগ ॥ খ'গ'** (৩, উঃ প্রঃ ১)।

এবং ∴ ∠**কখগ** = ∠**ক'খ'গ'** (১, উঃ প্রঃ ৭, অনুঃ)।

এইরূপে দেখা যাইবে, **কখগঘ** এবং **ক'খ'গ'ঘ'** এর অপর ∠গুলিও সমান।

আবার ∵ **কখ** ॥ **ক'খ'**, এবং **খগ** ॥ **খ'গ'**,

∴ △ **ওকখ**, △ **ওক'খ'**, এবং △ **ওখগ**, △**ওখ'গ'** সদৃশ,

এবং ∴ $\frac{\text{কখ}}{\text{ক'খ'}} = \frac{\text{ওখ}}{\text{ওখ'}} = \frac{\text{খগ}}{\text{খ'গ'}}$ ।

এইরূপে দেখা যাইবে, ক্ষেত্রদ্বয়ের অন্যান্য কোণসংলগ্ন বাহুগুলিও সমানুপাতী।

অতএব ক্ষেত্রদ্বয় সদৃশ।

এবং তাহারা সমভাবে স্থিত, যে হেতুক তাহাদের সমবর্ত্তী বাহুগুলি পরস্পর সমান্তর।

অনুমান। উপরে যাহা বলা হইয়াছে তাহা হইতে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, দুটি সদৃশ ও সমভাবে স্থিত ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের কোণ বিন্দুর যোজকগুলি একবিন্দুগামী।

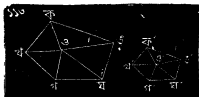
কারণ, মনে কর | **কক'** এবং | **খখ'**, **ও** তে মিলিত।

ওগ, ওগ', কগ, ক'গ' যোগ কর।

তাহা হইলে △ **ওগক** এবং △ **ওগ'ক'** যে সদৃশ তাহা সহজেই সপ্রমাণ হইবে।

∴ ∠ **কওগ** = ∠**ক'ওগ'**, এবং ∴ **ওগ, ওগ'** একই ঋজুরেখাতে অবস্থিত।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৮।

সদৃশ ত্রিভুজের ও সদৃশ বহুভুজের পরস্পরের অনুপাত তাহাদের সমবর্ত্তী বাহুর বর্গের অনুপাতের সমান।

১। মনে কর **কখগ** এবং **ক'খ'গ'** দুই সদৃশ $\triangle$।

তাহা হইলে $\dfrac{\triangle \text{ কখগ}}{\triangle \text{ ক'খ'গ'}} = \dfrac{\text{খগ}^2}{\text{খ'গ'}^2}$।

কঘ, ক'ঘ' $\perp$ **খগ, খ'গ'** টান।

তাহা হইলে $\triangle$**কখঘ** এবং $\triangle$ **ক'খ'ঘ'** স্পষ্ট দেখা যায় সমান কোণী এবং সদৃশ।

$$\therefore \quad \frac{\text{কঘ}}{\text{ক'ঘ'}} = \frac{\text{কখ}}{\text{ক'খ'}} = \frac{\text{খগ}}{\text{খ'গ'}}।$$

অতএব $\dfrac{\triangle \text{ কখগ}}{\triangle \text{ ক'খ'গ'}} = \dfrac{\frac{1}{2}\text{খগ} \cdot \text{কঘ}}{\frac{1}{2}\text{খ'গ'} \cdot \text{ক'ঘ'}}$ (১, উঃ প্রঃ ২০, টিঃ ২)

$$= \frac{\text{খগ}}{\text{খ'গ'}} \cdot \frac{\text{কঘ}}{\text{ক'ঘ'}} = \frac{\text{খগ}}{\text{খ'গ'}} \cdot \frac{\text{খগ}}{\text{খ'গ'}} = \frac{\text{খগ}^2}{\text{খ'গ'}^2}।$$

২। মনে কর **কখগঘঙ, ক'খ'গ'ঘ'ঙ'** দুই সদৃশ বহুভুজ।

তাহা হইলে $\dfrac{\text{কখগঘঙ}}{\text{ক'খ'গ'ঘ'ঙ'}} = \dfrac{\text{কখ}^2}{\text{ক'খ'}^2}$।

কারণ বহুভুজদ্বয় সমসংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে (৩, উঃ প্রঃ ৬)।

আর $\frac{\text{কখ}}{\text{ক´খ´}} = \frac{\text{খগ}}{\text{খ´গ´}} = \frac{\text{গঘ}}{\text{গ´ঘ´}} =$ ইত্যাদি,

এবং $\frac{\triangle\ \text{ওকখ}}{\triangle\ \text{ও´ক´খ´}} = \frac{\text{কখ}^2}{\text{ক´খ´}^2} = \frac{\text{খগ}^2}{\text{খ´গ´}^2} = \frac{\triangle\ \text{ওখগ}}{\triangle\ \text{ও´খ´গ´}} =$ ইত্যাদি।

$\therefore \frac{\text{কখগঘঙ'র অন্তর্গত}\ \triangle\ \text{সমষ্টি}}{\text{ক´খ´গ´ঘ´ঙ´'র অন্তর্গত}\ \triangle\ \text{সমষ্টি}} = \frac{\text{কখ}^2}{\text{ক´খ´}^2}$,

অর্থাৎ $\frac{\text{বহুভুজ কখগঘঙ}}{\text{বহুভুজ ক´খ´গ´ঘ´ঙ´}} = \frac{\text{কখ}^2}{\text{ক´খ´}^2}$।

৫। **সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণস্থিত ক্ষেত্র, এবং বাহুদ্বয়স্থিত সদৃশ ক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সম্বন্ধ।**

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৯।

সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের উপরে অঙ্কিত যে কোন ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র সেই ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের উপর তৎসদৃশ ও তৎসমান ভাবে অঙ্কিত ক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

মনে কর **কখগ** সম ∠**খকগ** বিশিষ্ট △,

এবং **র**$_1$, **র**$_2$, **র**$_3$, তাহার কর্ণ **খগ** ও বাহুদ্বয় **গক**, **কখ**'র উপর সদৃশ ও সমভাবে অঙ্কিত ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র।

তাহা হইলে **র**$_1$=**র**$_2$+**র**$_3$।

ক হইতে **খগ**'র উপর লম্ব **কঘ** টান।

তাহা হইলে　△ **ঘখক**　ও △ **ঘকগ**, △ **কখগ**'র সদৃশ,

এবং ∴ $\frac{\text{গখ}}{\text{খক}} = \frac{\text{খক}}{\text{খঘ}}$,　ও　$\frac{\text{গখ}}{\text{গক}} = \frac{\text{গক}}{\text{গঘ}}$,

এবং ∴ **খক**^{2}= **গখ·খঘ**, ও　**গক**^{2} =**গখ·গঘ**

(৩ পরিভাষা ৫, টিঃ ১, ২)।

∴ **খক**^{2}+**গক**^{2}=**গখ·খঘ** + **গখ·গঘ**　=**গখ**^{2}।

আবার $\frac{র_২}{র_১} = \frac{কগ^২}{খগ^২}$, $\frac{র_৩}{র_১} = \frac{কখ^২}{খগ^২}$

(৩, উঃ প্রঃ ৮)।

$\therefore$ যোগক্রমে, $\frac{র_২+র_৩}{র_১} = \frac{কগ^২+কখ^২}{খগ^২} = \frac{খগ^২}{খগ^২}$।

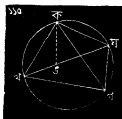
$\therefore \quad র_২+র_৩ = র_১$।

টিপ্পনী। উপরের প্রমাণ প্রণালীর প্রতি লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে, সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণ ও বাহুদ্বয়ের পরস্পরের দৈর্ঘ্যের সম্বন্ধে একটু বিচিত্রতা আছে। সমকোণ হইতে কর্ণের উপর যদি লম্ব টানা যায়, তদ্দারা কর্ণ দুই খণ্ডে বিভক্ত হইবে, এবং কর্ণ ও ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর অনুপাত সেই বাহু ও কর্ণের তৎসংলগ্ন খণ্ডের অনুপাতের সমান। অতএব প্রত্যেক বাহুর উপরিস্থ বর্গক্ষেত্র, কর্ণ ও তৎসংলগ্ন কর্ণ খণ্ডের অন্তর্গত আয়তের সমান, এবং বাহুদ্বয়ের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রদ্বয় উক্ত আয়তদ্বয়ের, অর্থাৎ কর্ণের উপরিস্থ বর্গক্ষেত্রের সমান। সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, ১ম অধ্যায়ের ২১ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার সত্যতা সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণ ও বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের পরস্পরের সম্বন্ধ হইতে এক প্রকার অনুমেয়।

ভাস্করাচার্য্যের বীজ গণিতের ১৪৬ ধারায় এই কথার কিঞ্চিৎ আভাস পাওয়া যায়।

৬। বৃত্ত মধ্যে অঙ্কিত চতুর্ভুজের বাহুর ও কর্ণের অন্তর্গত আয়তের সম্বন্ধ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১০।

বৃত্ত মধ্যে অঙ্কিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত তাহার বিপরীত বাহুযুগলের অন্তর্গত আয়তদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

মনে কর **কখগঘ**, ⊙ **কখগঘ** মধ্যে অঙ্কিত চতুর্ভুজ।

তাহা হইলে **কগ·খঘ** = **কখ·গঘ**+**কঘ·খগ**।

∠**খকঙ** = ∠**গকঘ** অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে ∵ ∠**কখঘ** = ∠**কগঘ** (২, উঃ প্রঃ ১০, অনুঃ ১),

∴ △ **খকঙ** ও △ **গকঘ** সদৃশ,

এবং ∴ $\frac{\text{কখ}}{\text{কগ}} = \frac{\text{খঙ}}{\text{গঘ}}$ (৩, উঃ প্রঃ ৩)।

∴ **কখ·গঘ** = **কগ·খঙ**।

আবার, ∵ ∠**খকঙ** = ∠**গকঘ**, ∴ ∠ **ঙকগ** যোগে,

∠**খকগ** = ∠**ঙকঘ**,

এবং ∠**খগক** = ∠**খঘক** (২, উঃ প্রঃ ১০, অনুঃ ১),

∴ △**খকগ** ও △ **ঙকঘ** সদৃশ।

এবং ∴ $\dfrac{\text{খগ}}{\text{কগ}} = \dfrac{\text{ঙঘ}}{\text{কঘ}}$ (৩, উঃ প্রঃ ৩)।

∴ খগ·কঘ = কগ·ঙঘ।

অতএব কখ·গঘ + কঘ·খগ = কগ·খঙ + কগ·ঙঘ

= কগ·খঘ।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা।

১। নির্দ্দিষ্ট অনুপাতে ঋজুরেখার বিভাগ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

একটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখা ভিতরে এবং বাহিরে নির্দ্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত কর।

মনে কর **কখ** নির্দ্দিষ্ট |, এবং **গঃ ঘ**, নির্দ্দিষ্ট অনুপাত।

কখকে গঃ ঘ অনুপাতে বিভক্ত করিতে হইবে।

ক হইতে যে কোন | **কঙ** টান,

এবং **কচ=গ** (**গ** ও **ঘ**'র মধ্যে বৃহত্তর)

চঙ=ঘ=চঙ', অঙ্কিত কর,

এবং **চজ** ‖ **ঙখ**, **চজ'** ‖ **ঙ'খ** টান।

তাহা হইলে **জ** ও **জ'** ইষ্ট ছেদবিন্দু হইবে।

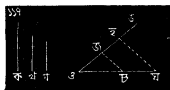
কারণ, ∵ **চজ** ‖ **ঙখ**, এবং **চজ'** ‖ **ঙ'খ**,

$$\therefore \frac{\text{কজ}}{\text{খজ}} = \frac{\text{কচ}}{\text{চঙ}} = \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} = \frac{\text{কচ}}{\text{চঙ}'} = \frac{\text{কজ}'}{\text{খজ}'}$$

(৩, উঃ প্রঃ ১)।

২। চতুর্থ, তৃতীয়, ও মধ্য সমানুপাতী নির্ণয়।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা ২।

তিনটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখার চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর **ক**, **খ**, **গ**'র চতুর্থসমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।

যে কোন দুটি সম্পাতী | **ওঘ**, **ওঙ** অঙ্কিত কর।

ওচ=**ক**, **চঘ**=**খ**, **ওজ**=**গ**, অঙ্কিত কর।

চজ যোগ কর, এবং **ঘহ** ॥ **চজ** টান।

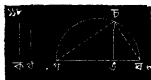
তাহা হইলে **জহ** ইষ্ট চতুর্থ সমানুপাতী হইবে।

কারণ, $\because$ **চজ** ॥ **ঘহ**,

$$\therefore \frac{\text{ওচ}}{\text{চঘ}} = \frac{\text{ওজ}}{\text{জহ}}, \text{ অথবা, } \frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{\text{গ}}{\text{জহ}}।$$

অনুমান। ঐরূপে **ক** এবং **খ** র তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় করা যাইতে পারে, যদি **ওজ**=**খ** অঙ্কিত করা যায়। এবং তাহা হইলে $\frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{\text{খ}}{\text{জহ}}$ হইবে।

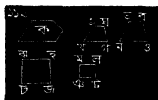
সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩।

দুটি নির্দ্দিষ্ট ঋজু রেখার মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর **ক** এবং **খ**'র মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইবে।
যে কোন | **গঘ** লইয়া **গঙ**=**ক**, **ঙঘ**=**খ** অঙ্কিত কর।
গঘ'র উপর অর্দ্ধবৃত্ত **গচঘ** অঙ্কিত কর।
এবং **গঘ**'র উপর **ঙচ** ⊥ টান।
ঙচ ইষ্ট মধ্যসমানুপাতী হইবে।
কারণ, **চগ**, **চঘ** যোগ করিলে দেখা যায়,
∠ **গচঘ** = সম ∠ (**২**, উঃ প্রঃ ১১),
এবং △ **গচঙ** ও △ **চঘঙ** সমানকোনী ও সদৃশ।

$$\therefore \frac{গঙ}{ঙচ} = \frac{ঙচ}{ঙঘ}, \text{ অথবা } \frac{ক}{ঙচ} = \frac{ঙচ}{খ}।$$

৩। নির্দ্দিষ্ট প্রকারের ও নির্দ্দিষ্ট পরিমাণের ক্ষেত্র অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৪।

এরূপ একটি ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত কর যাহা অপর একটি ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের সমান, এবং আর একটি ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ হইবে।

মনে কর **ক**'র সমান এবং **খগঘঙ**'র সদৃশ একটি ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

ক এবং **খগঘঙ**'র সমান বর্গ ক্ষেত্র **চজহঝ, ঞটলম** অঙ্কিত কর (১, সঃ প্রঃ ১১)।

এবং **ঞট, চজ,** এবং **খগ**'র চতুর্থ সমানুপাতী **নও** নির্ণয় কর (৩, সঃ প্রঃ ২)।

এবং **নও**'র উপর **খগঘঙ**'র সদৃশক্ষেত্র **নওবভ** অঙ্কিত কর (৩, উঃ প্রঃ ৬, অনুঃ)। তাহা হইলে **নওবভ** ইষ্ট ক্ষেত্র হইবে।

কারণ, $\because$ $\frac{\text{ঞট}}{\text{চজ}}=\frac{\text{খগ}}{\text{নও}}$ (অঙ্কন অনুসারে),

$$\therefore \frac{\text{ঞট}^2}{\text{চজ}^2}=\frac{\text{খগ}^2}{\text{নও}^2}=\frac{\text{খগঘঙ}}{\text{নওবভ}}$$ (৩, উঃ প্রঃ ৮)।

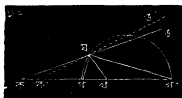
কিন্তু **খগঘঙ** $=$ **ঞট**^{2}। $\therefore$ **নওবভ** $=$ **চজ**^{2} $=$ **ক**।

এবং ক্ষেত্র **নওবভ** ক্ষেত্র **খগঘঙ**'র সদৃশ।

টিপ্পনী। ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কন সম্বন্ধে এইটি সর্ব্বাপেক্ষা ব্যাপক সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা। এবং ১ম অধ্যায়ের ১১ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা, যাহার সাহায্য এস্থলে গ্রহণ করা হইয়াছে, ইহার একটি বিশেষ দৃষ্টান্ত মাত্র।

৪। নির্দ্দিষ্ট নিয়মাধীন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর নিয়তস্থান নির্ণয়।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৫।

নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর নির্দ্দিষ্ট অনুপাতী বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুর নিয়তস্থান নির্ণয় কর।

নির্দ্দিষ্ট বাহু কখকে গ ও গ´এতে অন্তরে ও বাহিরে নির্দ্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত কর, এবং গগ´র উপর অর্দ্ধবৃত্ত গঘগ´ অঙ্কিত কর।

এই অর্দ্ধবৃত্ত ইষ্ট নিয়তস্থান হইবে।

কারণ, এই অর্দ্ধবৃত্তে যে কোন বিন্দু ঘ লইয়া,

ঘক, ঘখ, ঘগ, ঘগ´ যোগ কর, এবং কঘকে ঙতে বর্দ্ধিত কর।

তাহা হইলে, যদি ঘগ, ∠কঘখ'র সমদ্বিখণ্ডকারী হয়,

তবে ঘগ´, ∠খঘঙ'র সমদ্বিখণ্ডকারী হইবে,

∵ ∠গঘগ´ অর্দ্ধবৃত্তে থাকায়=সম ∠।

এবং $\frac{কঘ}{খঘ} = \frac{কগ}{খগ} = \frac{কগ´}{খগ´}$ = নির্দ্দিষ্ট অনুপাত।

কিন্তু যদি সম্ভবপর হয়, মনে কর ঘগ, ∠কঘখ'র সমদ্বিখণ্ডকারী নহে, এবং মনে কর ∠খঘগ = ∠গঘক´।

ক´ঘ কে ঙ´ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর, তাহা হইলে,

∴ ∠গঘগ´ অর্দ্ধ বৃত্তে থাকায় = সম ∠,

∴ ঘগ´, ∠খঘঙ´ কে সমদ্বিখণ্ড করিবে।

$\therefore \frac{\text{ক}'\text{গ}'}{\text{গ}'\text{খ}} = \frac{\text{গক}'}{\text{গখ}}$, $\therefore \frac{\text{ক}'\text{গ}'}{\text{গক}'} = \frac{\text{গ}'\text{খ}}{\text{গখ}}$ (একান্তর ক্রমে);

এবং $\frac{\text{কগ}'}{\text{গ}'\text{খ}} = \frac{\text{কগ}}{\text{গখ}}$, $\therefore \frac{\text{কগ}'}{\text{কগ}} = \frac{\text{গ}'\text{খ}}{\text{গখ}}$ ।

$\therefore \frac{\text{ক}'\text{গ}'}{\text{গক}'} = \frac{\text{কগ}'}{\text{গক}}$ $\therefore \frac{\text{গগ}'}{\text{গক}'} = \frac{\text{গগ}'}{\text{গক}}$, (বিয়োগ ক্রমে)।

$\therefore \text{গক}' = \text{গক}$। সুতরাং ক ও ক′ ভিন্ন নহে।

৫। বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৬।

বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ যদি এক হয়, তবে বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সন্নিহিত সংখ্যা কত হইবে, অথবা পরিধি ও ব্যাসের অনুপাতের সন্নিহিত সংখ্যা কত, তাহা নির্ণয় কর।

পূর্ব্বে বলা হইয়াছে (২য় অধ্যায় ৮ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞাতে) যে,

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=$ $\frac{১}{২}$ র গ (যদি র $=$ ব্যাসার্দ্ধ, গ $=$ ○)

$$= পব^{২} \left(যদি\ প = \frac{গ}{২র} \right)।$$

আরও বলা হইয়াছে প $>$ ৩ $<$ ৩$\frac{১}{৭}$।

এক্ষণে প'র মূল্যের সন্নিহিত সংখ্যা নির্ণয় করা যাইবে।

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=$ পর^{২} $=$ প,

যদি ব্যাসার্দ্ধ, র $=$ ১ হয়।

সুতরাং ব্যাসার্দ্ধ $=$ ১ হইলে,

প এর মূল্যের সন্নিহিত সংখ্যা $=$ বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সন্নিহিত সংখ্যা।

প এর মূল্য নির্ণয়ার্থে নিম্নলিখিত প্রতিজ্ঞা অগ্রে সপ্রমাণ করা আবশ্যক।

যদি বৃত্তের অন্তরস্থিত ও বহিরস্থিত ন সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সমবাহু সমান কোণী বহুভুজের ক্ষেত্রফল অ এবং ই হয়, এবং ২ ন সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট ঐ ঐ রূপ বহুভুজের ক্ষেত্রফল অ´ এবং ই´ হয়, তাহা হইলে,

$$অ' = \sqrt{অই},\quad ই' = \frac{২ ইঅ'}{ই + অ'}।$$

এই বহুভুজ চতুষ্টয়কেও সংক্ষেপে অ, অ', ই, ই' বলা যাইবে।

মনে কর, **কথ** এবং **ভর**, অ এবং ই এর বাহু,

আর **কব** এবং **যপ**, অ' এবং ই' এর বাহু।

তাহা হইলে অ এবং ই যে ন সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে, △**ওকম** এবং △ **ওভব** যথাক্রমে তাহাদের এক একটির অর্দ্ধেক, আর অ' এবং ই' যে ২ ন সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে, △ **ওকব**, △ **ওযপ** যথাক্রমে তাহাদের মধ্যে এক একটি।

$$\text{অতএব,}\quad \frac{অ}{অ'} = \frac{২ন\triangle ওকম}{২ন\triangle ওকব} = \frac{\triangle ওকম}{\triangle ওকব}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}কম\cdot ওম}{\frac{1}{2}কম\cdot ওব} = \frac{ওম}{ওব}$$

$$= \frac{ওক}{ওভ} = \frac{\triangle ওকব}{\triangle ওভব} = \frac{২ন\triangle ওকব}{২ন\triangle ওভব}$$

$$= \frac{অ'}{ই}।\quad \therefore\quad অ'^{২} = অই,$$

$$\therefore\quad অ' = \sqrt{অই}।$$

$$\text{আবার,}\quad \frac{যভ}{যব} = \frac{ওভ}{ওব}\ (\because \angle যওভ = \angle যওব)$$

$$= \frac{ওভ}{ওক}।$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ওযভ}{\triangle ওযব} = \frac{\triangle ওভব}{\triangle ওকব} = \frac{২ন\triangle ওভব}{২ন\triangle ওকব} = \frac{ই}{অ'}।$$

$$\therefore\quad \frac{ই + অ'}{অ'} = \frac{\triangle ওযভ + \triangle ওযব}{\triangle ওযব}$$

$$= \frac{\triangle ওভব}{\triangle ওযব} = \frac{৪ন\triangle ওভব}{৪ন\triangle ওযব} = \frac{২ই}{ই'}।$$

$$\text{অতএব } ই' = \frac{২ইঅ'}{ই+অ'}।$$

যদি $র = ১$, এবং $ন = ৪$,

তাহা হইলে, $অ = ২$, $ই = ৪$,

$$\text{এবং } \therefore অ' = \sqrt{অ \cdot ই} = \sqrt{৮} = ২\cdot৮২৮৪২৭১$$

$$ই' = \frac{২ ই অ'}{ই+অ'} = \frac{৮\sqrt{৮}}{৪+\sqrt{৮}} = \frac{১৬}{২+\sqrt{৪}}$$

$$= ৩^{\cdot}৩১৩৭০৮৫$$

এই প্রণালীতে চলিলে নিম্নের সংখ্যাশ্রেণি পাওয়া যাইবে।—

বাহুর সংখ্যা	অন্তরঙ্কিত বহুভুজের ক্ষেত্রফল	বহিরঙ্কিত বহুভুজের ক্ষেত্রফল
৪	২˙০০০০০০	৪˙০০০০০০
৮	২˙৮২৮৪২	৩˙৩১৩৭০
১৬	৩˙০৬১৪৬	৩˙১৮২৫৯
৩২	৩˙১২১৪৪	৩˙১৫১৭২
৬৪	৩˙১৩৬৫৪··	৩˙১৪৪১১
১২৮	৩˙১৪০৩৩	৩˙১৪২২২
২৫৬	৩˙১৪১২৭·	৩˙১৪১৭৫ ·
৫১২	৩ ১৪১৫১	৩˙১৪১৬৩
১০২৪	৩˙১৪১৫৭··	৩˙১৪১৬০
২০৪৮	৩˙১৪১৫৮··	৩˙১৪১৫৯ ·
৪০৯৬	৩˙১৪১৫৯ ·	৩˙১৪১৫৯·

অতএব দেখা যাইতেছে ব্যাসার্দ্ধ যদি ১ হয় তাহা হইলে সমবাহু সমানকোণী ৪০৯৬ বাহুযুক্ত অন্তরঙ্কিত ও বহিরঙ্কিত বহুভুজের ক্ষেত্রফল জ্ঞাপক সংখ্যাদ্বয়ের দশমিকের ৫ম ঘর পর্য্যন্ত কোন প্রভেদ নাই, অর্থাৎ সেই সংখ্যাদ্বয়ের প্রভেদ ১ এর অথবা ব্যাসার্দ্ধের বর্গের $\frac{১}{১০০০০০}$ ভাগের ন্যুন।

আর যখন বৃত্তের ক্ষেত্রফল উক্ত বহুভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের মধ্যবর্ত্তী, তখন ঐ ক্ষেত্রফলদ্বয়ের যে কোনটির ও বৃত্তের ক্ষেত্রফলের প্রভেদ আরও ন্যূন।

অতএব যদি দশমিকের ৫ ঘর পর্যন্ত অপেক্ষা অধিক সূক্ষ্ম গণনার প্রয়োজন না হয়, তাহা হইলে ৩·১৪১৫৯ এই সংখ্যা ১ ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল বলিয়া লওয়া যাইতে পারে, এবং পরিধি ও ব্যাসার্দ্ধের অনুপাত জ্ঞাপক সংখ্যা বলিয়াও লওয়া যাইতে পারে।

উপরের প্রদর্শিত প্রণালীতে আরও অধিক দূর চলিলে, যতদূর ইচ্ছা গণনার সূক্ষ্মতা রক্ষা করা যাইতে পারে।

টিপ্পনী ১। উপরে যাহা বলা হইল তাহা লিজান্দারের জ্যামিতির ৪র্থ অধ্যায়ের ১৩ ও ১৪ প্রতিজ্ঞা হইতে (কিঞ্চিৎ পরিবর্ত্তিত আকারে) গৃহীত হইয়াছে।

টিপ্পনী ২। এই প্রতিজ্ঞার মানিয়া লওয়া হইয়াছে যে, বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্দ্ধের অনুপাত নিত্য, অর্থাৎ সকল বৃত্তেই সমান। একথার সত্যতা স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, এবং সহজেই সপ্রমাণ করা যাইতে পারে।

মনে কব, ব এবং ব´ ব্যাসার্দ্ধ বিশিষ্ট ছুটি বৃত্তে ন সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট সমবাহু সমানকোণী ছুটি বহুভুজ অন্তবঙ্কিত হইয়াছে, এবং প্রত্যেক বহুভুজের ছুটি পব পব কোণ বিন্দু কেন্দ্রেব সহিত যোগ করা হইয়াছে। তাহা হইলে, যে ত্রিভুজদ্বয় অঙ্কিত হইল তাহারা স্পষ্টই সমানকোণী এবং সদৃশ। অতএব যদি বহুভূজদ্বয়ের বাহু অ এবং অ হয়, তাহা হইলে ব　র´　অ　অ´ ন অ　ন অ´, ন এর মূল্য যতই হউক। কিন্তু ন এর মূল্য অসীম বৃহৎ হইলে, অ, অ´ এব মূল্য অসীম ক্ষুদ্র হইবে, এবং বহু ভুজদ্বয়ের পবিধি, ন অ এবং ন অ´, বৃত্তদ্বয়ের পরিধির সমান হইবে। অতএব,

$$\frac{\text{১ম বৃত্তেব পবিধি}}{\text{২য় বৃত্তের পবিধি}} = \frac{\text{ব}}{\text{ব}'}, \text{ অথবা}$$

$$\frac{\text{১ম বৃত্তের পরিধি}}{\text{র}} = \frac{\text{২য় বৃত্তের পরিধি}}{\text{র}'}।$$

চতুর্থ পরিচ্ছেদ।

অনুশীলনার্থ উদাহরণমালা।

১। একই সমান্তরের অন্তর্গত ত্রিভুজ সকল্ তাহাদের ভূমির সমানুপাতী।

২। দুইটি নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখার অন্তর্গত প্রত্যেক ঋজুরেখাকে, তদ্দারা ছেদিত প্রথমোক্ত রেখাদ্বয়ের খণ্ডের অনুপাতে যে বিন্দু বিভক্ত করে, তাহার নিয়তস্থান নির্ণয় কর।

৩। যদি কোন চতুর্ভুজের দুই বাহু সমান্তর হয়, তাহা হইলে তাহার অপর বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর যোজক তাহার সমান্তর বাহুর সহিত সমান্তর।

৪। নির্দ্দিষ্ট ভূমির উপর নির্দ্দিষ্ট অনুপাতী বাহুদ্বয় ও নির্দ্দিষ্ট শীর্ষকোণ বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

৫। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে কর্ণের উপর লম্ব টানিলে, কর্ণ এরূপ দুই খণ্ডে বিভক্ত হইবে যে, ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু, কর্ণ ও সংলগ্ন কর্ণখণ্ডের মধ্যানুপাতী হইবে।

৬। যদি দুটি বৃত্তে দুটি সমান্তর ব্যাসার্দ্ধ টানা যায়, তাহা হইলে তাহাদের প্রান্তযোজক ঋজুরেখা উভয় দিকে বর্দ্ধিত করিলে তাহা বৃত্তদ্বয় হইতে সদৃশ বৃত্তখণ্ড ছেদিত করিবে, এবং সেই বৃত্তখণ্ডের জ্যাদ্বয় বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্দ্ধের সমানুপাতী হইবে।

৭। কোন ত্রিভুজ, শীর্ষ হইতে ভূমি পর্য্যন্ত টানা ঋজুরেখাদ্বারা দ্বিখণ্ড হইলে, সেই খণ্ডদ্বয়ের বহিরঙ্কিত বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্দ্ধ, ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের সমানুপাতী হইবে।

৮। অসমান বৃত্তে, কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ সমান সমান কোণ যে যে চাপের উপর দণ্ডায়মান, তাহাদের জ্যা তত্তৎ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সমানুপাতী।

৯। অসমান বৃত্তে সদৃশ বৃত্তখণ্ড যে যে জ্যার উপর দণ্ডায়মান, তাহারা তত্তৎ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সমানুপাতী।

১০। সদৃশ ত্রিভুজ সকল তাহাদের বহিরঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের বর্গের সমানুপাতী।

১১। একটি ত্রিভুজকে তাহার কোন এক বাহুর সমান্তর ঋজুরেখাদ্বারা সমদ্বিখণ্ড কর।

১২। বৃত্তের অন্তরঙ্কিত সমবাহু সমানকোণী ষড়্ভুজের ক্ষেত্রফল বহিরঙ্কিত ঐ রূপ ষড়্ভুজের ক্ষেত্রফলের ত্রিচতুর্থাংশ।

১৩। যদি কোন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয় ক্রমাগত সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে তাহার সমকোণ হইতে কর্ণের উপর পতিত লম্ব কর্ণকে এরূপে বিভক্ত করিবে যে, তাহার বৃহত্তর খণ্ড, কর্ণ ও ক্ষুদ্রতর খণ্ডের মধ্যানুপাতী হইবে।

১৪। যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করে, তাহা হইলে তাহাদের সাধারণ স্পর্শিনী তাহাদের ব্যাসদ্বয়ের মধ্যানুপাতী হইবে।

চতুর্থ অধ্যায়।

সমতল ও ঘনয়াতন।

প্রথম পরিচ্ছেদ।

পরিভাষা।

উপক্রমণিকা। পূর্ব্ববর্ত্তী তিন অধ্যায়ে একই সমতলস্থিত বিন্দু রেখা, কোণ, ও ক্ষেত্রেব বিষয় আলোচিত হইয়াছে। এই অধ্যায়ে ভিন্ন ভিন্ন সমতলস্থিত বিন্দু, রেখা, কোণ, ও ক্ষেত্রের বিষয় আলোচনা হইবে।

পরিভাষা ১। যদি কোন ঋজুরেখা কোন সমতলস্থিত যত ঋজুরেখা তৎসহ সংলগ্ন হয় তাহাদেব প্রত্যেকেব সহিত সমকোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে তাহাকে সেই **সমতলের লম্ব** বলে।

২। যদি দুই সমতলেব ছেদজ রেখাব উপব তন্মধ্যে এক সমতলে লম্ব টানিলে তাহা অপব সমতলের লম্ব হয়, তাহা হইলে সেই দুই সমতলেব **এক সমতলকে অপর সমতলের লম্ব** বলে।

৩। একটি ঋজুবেখাস্থ যে কোন বিন্দু হইতে একটি সমতলেব উপব লম্ব টানিলে, ঐ লম্ব ও ঋজুরেখা যে যে বিন্দুতে সমতলের সংলগ্ন, তত্তৎ বিন্দুর যোজক ঋজুরেখা ও প্রথমোক্ত ঋজুরেখার অন্তর্গত সূক্ষ্ম কোণকে **সমতলের উপর ঐ ঋজুরেখার অবনতি** বলে।

৪। দুই সমতলের পরস্পর ছেদজ রেখার যে কোন বিন্দু হইতে তদুপরি একটি লম্ব এক সমতলে ও আর একটি অপর সমতলে টানিলে সেই লম্বদ্বয়ের অন্তর্গত সূক্ষ্ম কোণকে **এক সমতলের উপর অপর সমতলের অবনতি** অথবা **দ্বিভূমিক কোণ** বা **দ্বিপৃষ্ঠ্য কোণ** বলে।

৫। **সমান্তর সমতল** তাহাদিগকে বলে, যে সকল সমতল যতদূর ইচ্ছা বর্দ্ধিত করিলেও মিলিত হয় না।

৬। দুইএর অধিক ভিন্ন ভিন্ন সমতলস্থিত কোণসমূহ এক বিন্দুতে মিলিত হইলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে **ঘনকোণ** বলে।

তাহা তিন, চারি, অথবা ততোধিক সমতলস্থ কোণ দ্বারা উৎপন্ন হইলে তাহাকে যথাক্রমে, **ত্রিভূমিক** বা **ত্রিপৃষ্ঠ্য, চতুর্ভূমিক** বা **চতুষ্পৃষ্ঠ্য,** অথবা **বহুভূমিক** বা **বহুপৃষ্ঠ্য,** কোণ বলে।

যে ঘনকোণের ভূমিগুলি বা পৃষ্ঠগুলি একটি সমতলদ্বারা ছেদিত হইলে ছেদজ ক্ষেত্রে একটিও বিরূপ বা উল্টা কোণ থাকে না, তাহাকে **কুব্জ** ঘনকোণ বলে।

৭। যে বহুপৃষ্ঠ ঘনায়তন কতকগুলি সমতল ক্ষেত্রের এরূপ যোগে উৎপন্ন যে তন্মধ্যে **ভূমি** বলিয়া অভিহিত একটি ভিন্ন অপর ক্ষেত্রগুলি সমস্ত **শীর্ষ বিন্দু** নামক এক বিন্দুতে মিলিত, তাহাকে **সূচী** বলে।

৮। যে বহুপৃষ্ঠ ঘনায়তনের দুই পৃষ্ঠ (যাহাদের **ভূমি** বলে) সমান্তর সদৃশ ও সমান ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র, এবং অপর পৃষ্ঠগুলি (যাহাদের **পার্শ্ব-পৃষ্ঠ** বলে) সামান্তরিক, তাহাকে **ফলক** বলে। এবং যদি পার্শ্বপৃষ্ঠগুলি ভূমির লম্ব হয়, তাহা হইলে ফলককে **সোজা** ফলক বলে।

৯। যে ফলকের ভূমিদ্বয় দুটি সামান্তরিক তাহাকে **সামান্তরিক পৃষ্ঠ** বলে।

১০। ব্যাসকে স্থির রাখিয়া তাহার চতুষ্পার্শ্বে বৃত্তার্দ্ধকে ঘূর্ণ্যমান করিলে যে ঘনায়তন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **গোলক** বা **বর্ত্তুল** বলে।

১১। আয়তের এক বাহু স্থির রাখিয়া তাহার চতুষ্পার্শ্বে আয়তকে ঘূর্ণ্যমান করিলে যে ঘনায়তন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **সোজা স্তম্ভ** বলে।

১২। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন এক বাহুকে স্থির রাখিয়া তাহার চতুষ্পার্শ্বে ত্রিভুজকে ঘূর্ণ্যমান করিলে যে ঘনায়তন উৎপন্ন হয় তাহাকে **সোজা বৃত্তসূচী** বলে।

১৩। চারিটি সমান সমবাহু ত্রিভুজের যোগে উৎপন্ন আয়তনকে **চতুষ্পৃষ্ঠ** বলে।

১৪। ছয়টি সমান বর্গক্ষেত্র অর্থাৎ সমবাহু সমকোণী চতুর্ভুজের যোগে উৎপন্ন ঘনায়তনকে **ঘনক্ষেত্র** বা **ষট্পৃষ্ঠ** বলে।

১৫। যে ঘনায়তন আটটি সমান সমবাহু ত্রিভুজের যোগে উৎপন্ন, তাহাকে **অষ্টপৃষ্ঠ** বলে।

১৬। যে ঘনায়তন দ্বাদশটি সমান সমবাহু সমানকোণী পঞ্চভুজের যোগে উৎপন্ন, তাহাকে **দ্বাদশপৃষ্ঠ** বলে।

১৭। যে ঘনায়তন বিংশতি সমান সমবাহু ত্রিভুজের যোগে উৎপন্ন তাহাকে **বিংশতিপৃষ্ঠ** বলে।

১৮। কোন ঋজুরেখাস্থিত বিন্দুসমূহ হইতে কোন সমতলে লম্ব টানিলে লম্বসমূহের পাদবিন্দুর নিয়তস্থানকে সেই সমতলে সেই ঋজুরেখার **প্রক্ষেপণী** বলে।

টিপ্পনী ১। উপরের পরিভাষার কোন কোন স্থলে পরবর্ত্তী প্রতিজ্ঞার সত্যতা মানিয়া লওয়া হইয়াছে। যথা ১ম পরিভাষায় মানিয়া লওয়া হইয়াছে যে, একটি ঋজুরেখা তৎসংলগ্ন এক সমতলস্থ সমস্ত ঋজুরেখার উপর লম্ব হইতে পারে, এবং এই কথা এই অধ্যায়ের ৪র্থ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় উপপন্ন করা হইয়াছে। আবার ২য় ও ৪র্থ পরিভাষায় মানিয়া লওয়া হইয়াছে যে, দুই সমতলের ছেদরেখা ঋজুরেখা, এবং এই কথা এই অধ্যায়ের ৩য় উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় সপ্রমাণ করা হইয়াছে। কিন্তু যে যে কথার সত্যতা মানিয়া লওয়া হইয়াছে তাহা অতি সহজ ও স্পষ্ট।

টিপ্পনী ২। স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, কোন **একটি** বিন্দু দিয়া অসংখ্য ঋজুরেখা টানা যায়, এবং **দুইটি** বিন্দু নির্দ্দিষ্ট হইলে ঋজুরেখার স্থান নির্দ্দিষ্ট হয়।

ইহাও স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে, **দুটি** বিন্দু দিয়া অর্থাৎ তাহাদের যোজক ঋজুরেখা দিয়া অসংখ্য সমতল অঙ্কিত হইতে পারে, এবং এক ঋজুরেখায় নহে এরূপ **তিনটি** বিন্দু নির্দ্দিষ্ট হইলে সমতল নির্দ্দিষ্ট হয়।

এবং **ঋজুরেখা** যেমন তদুপরিস্থ যে কোন **বিন্দুর** চারিদিকে ঘূর্ণিত হইতে পারে, **সমতলও** তেমনি তদুপরিস্থিত যে কোন **ঋজুরেখার** চারিদিকে ঘূর্ণিত হইতে পারে।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা।

১। এক সমতলস্থ ঋজুরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

কোন ঋজুরেখার একাংশ এক সমতলে এবং অপরাংশ তাহার বাহিরে থাকিতে পারে না।

যদি সম্ভবপর হয়, মনে কর

| **কখগ**'র একাংশ **কখ** সমতল **ব**'তে

অপরাংশ **খগ** তাহার বাহিরে।

যখন | **কখ** সমতল **ব**'তে,

তখন তাহা সেই সমতলে বর্দ্ধিত হইতে পারে (১, স্বীঃ কঃ ২)।

মনে কর | **কখ, ঘ** পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইল।

তাহার পর মনে কর সমতল **ব, কঘ**'র উপর ঘুরান হইল যতক্ষণ না তাহা **গ**'তে সংলগ্ন হয়।

তাহা হইলে | **কখগ** এবং | **কখঘ** ইহারা

আংশিকভাবে মিলিত হইল,

কিন্তু তাহা হইতে পারে না (১, স্বঃ সিঃ ১০)।

টিপ্পনী। এ প্রতিজ্ঞার সত্যতা সমতলের লক্ষণ ও ১০ স্বতঃ সিদ্ধ হইতে স্পষ্ট দেখা যায়।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২।

১। দুটি সম্পাতী ঋজুরেখা এক, এবং কেবল একমাত্র সমতলে থাকিবে।

২। এবং তিনটি পরস্পর সম্পাতী কিন্তু একবিন্দুগামী নহে এরূপ ঋজুরেখা একই সমতলে থাকিবে।

১। মনে কর **কখ, গঘ** দুটি সম্পাতী | যাহাদের সম্পাতবিন্দু **ঙ**। তাহা হইলে **কখ, গঘ** এক এবং কেবল এক মাত্র সমতলে থাকিবে।

মনে কর সমতল **ব,** ঋজুরেখা **কখ**কে ধারণ করিতেছে।

সমতল **ব**'কে **কখ**'র উপর ঘুরাও যতক্ষণ না তাহা **গ**'র সংলগ্ন হয়।

তাহা হইলে যখন **গ** ও **ঙ** সেই সমতলে,

তখন **গঙঘ** সমস্তই সেই সমতলে (২, উঃ প্রঃ ১)।

আর **কখ,গঘ** অন্য কোন সমতলে থাকিতে পারে না।

যদি সম্ভবপর হয়, মনে কর তাহারা **ব´** সমতলে আছে।

ব´ সমতলে যে কোন বিন্দু **স** লইয়া | **সষশ** টান ,

এবং মনে কর | **সষশ**, | **কখ**, এবং | **গঘ´** কে

ষ এবং **শ** তে ছেদ করিতেছে।

তাহা হইলে ∵ **ষ** এবং **শ**, | **কখ**, এবং | **গঘ**তে আছে,

∴ **ষ** এবং **শ** সমতল **ব**'তে আছে।

∴ | **সষশ** সমতল **ব**'তে,

এবং ∴ বিন্দু **স**, সমতল **ব**'তে।

ঐরূপে দেখান যাইতে পারে **ব´** এর

অন্য যে কোন বিন্দু লইলে তাহা সমতল **ব**'তে।

অতএব সমতল **ব´** সমতল **ব** হইতে ভিন্ন নহে।

২। মনে কর **খক, কঘ, ঘগ** তিনটি সম্পাতী |,

এবং **ক, ঘ,** ও তাহাদের ছেদবিন্দু।

তাহারা একই সমতলে আছে।

কারণ, পূর্ব্ব প্রদর্শিত মতে

কখ, গঘ একই সমতল ব'তে।

এবং ∵ **ক** এবং **ঘ** সেই সমতলে,

∴ | **কঘ** সেই সমতলে।

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞা হইতে দেখা যাইবে তিনটি বিন্দু যাহা এক ঋজুরেখায় নহে, অথবা দুটি সম্পাতী ঋজুরেখা, সমতলের স্থান নির্দ্দিষ্ট করিয়া দেয়।

২। দুই সমতলের ছেদরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩।

যদি দুটি সমতল পরস্পরকে ছেদ করে, তাহা হইলে তাহাদের ছেদ রেখা একটি ঋজু-রেখা।

মনে কর সমতল **ব** এবং সমতল **ব**

কখ রেখায় পরস্পরকে ছেদ করিতেছে।

তাহা হইলে **কখ** একটি | ।

কারণ যদি তাহা না হয়, **ক** এবং **খ**'কে

ব এবং **ব**´ দুই সমতলে | **কগখ**, | **কগ´খ** দ্বারা

যোগ করা যাইবে,

এবং তাহারা স্থান বেষ্টন করিবে।

কিন্তু তাহা হইতে পারে না।

অতএব **কখ** একটি ঋজুরেখা।

৩। সমতলের উপর লম্ব ঋজুরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৪।

যদি কোন ঋজুরেখা দুটি সম্পাতী ঋজুরেখার সম্পাত বিন্দুতে তাহাদের উভয়ের উপর লম্ব হয়, তবে সেই ঋজুরেখা তৎসংলগ্ন এবং উক্ত রেখাদ্বয়ের সমতলস্থ প্রত্যেক ঋজুরেখার উপর লম্ব হইবে। অর্থাৎ সেই সমতলের উপর লম্ব হইবে।

মনে কর **কও** ⊥ **খও**ঙ, **গওঘ**।

তাহা হইলে **কও**⊥যে কোন। **চওজ**।

ওখতে যে কোন বিন্দু **খ** লইয়া, **ওগ**, **ওঘ**, **ওঙ**=**ওখ** করিয়া টান,

খগ, **ঘঙ**, যোগ কর, এবং মনে কর

তাহারা **চওজ**কে **চ** এবং **জ**'তে ছেদ করিয়াছে।

খ, **গ**, **ঘ**, **ঙ**, **চ**, **জ**কে **ক**'র সহিত যোগ কর।

তাহা হইলে, △ **খওগ** এবং △ **ঙওঘ**তে,

∵ **ওখ**=**ওঙ**, **ওগ**=**ওঘ**, এবং ∠**খওগ**=∠**ঙওঘ**,

∴ **খগ**=**ঙঘ**, এবং ∠**ওখগ**=∠**ওঙঘ** (১, উঃ প্রঃ ১২)।

আবার, △ **খওচ** এবং △ **ঙওজ** তে,

∵ ∠ **খওচ** = ∠ **ঙওজ**, ∠ **ওখচ** = ∠ **ওঙজ**,

এবং **ওখ** = **ওঙ**,

∴ **খচ** = **ঙজ**, **ওচ**=**ওজ** (১, উঃ প্রঃ ১৪)।

এবং ∵ ঙক, খঙ এবং গঘ'র সমদ্বিখণ্ডকারী লম্ব,

∴ কখ = কঙ, কগ = কঘ। এবং খগ = ঙঘ।

∴ △ কখগ, △ কঙঘ হইতে ∠ কখগ = ∠ কঙঘ।

এবং △ কখচ, △ কঙজ হইতে, কচ = কজ।

অতএব △ কওচ, △ কওজ তে,

ওচ = ওজ, ওক উভয়েতে আছে, এবং কচ = কজ,

∴ ∠ কওচ = ∠ কওজ (১, উঃ প্রঃ ১৩)

= সম ∠।

∴ কও ⊥ চজ, এবং ∴ ⊥ সমতল খওজ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৫।

যদি তিন বা ততোধিক একবিন্দুগামী ঋজুরেখার সম্পাত বিন্দুতে তাহাদের একটি সাধারণ লম্ব থাকে তবে তাহারা একই সমতলস্থ।

মনে কর **ওক** ⊥ **ওখ**, **ওগ**, **ওঘ**।

তাহা হইলে, **ওখ**, **ওগ**, **ওঘ** একই সমতলস্থ।

কারণ, যদি তাহা না হয়, মনে কর, **ওঘ**,

ওখ এবং **ওগ** হইতে ভিন্ন সমতলে,

এবং সমতল **খওগ**, সমতল **কওঘ** কে **ওঙ** তে ছেদ করিতেছে।

তাহা হইলে **ওঙ** সমতল **খওগ** তে স্থিত।

এবং ∵ **ওক** ⊥ **ওখ** এবং **ওগ**,

∴ **ওক** ⊥ **ওঙ** (৪, উঃ প্রঃ ৪)।

∴ ∠ **কওঙ** = সম ∠ = ∠ **কওঘ** (কল্পনানুসারে)।

কিন্তু তাহা হইতে পারে না, ∵ **ওক**, **ওঘ**, **ওঙ**,

একই সমতলে, এবং ∠ **কওঘ** < ∠ **কওঙ**,

যদি **ওঙ** এবং **ওঘ** মিলিত না হয়।

অতএব **ওঙ** এবং **ওঘ** ভিন্ন নহে।

এবং ∴ **ওঘ**, **ওখ** এবং **ওগ**'র সহিত একই সমতলস্থ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৬।

১। যদি দুটি ঋজুরেখা সমান্তর হয়, এবং তন্মধ্যে একটি কোন সমতলের লম্ব হয়, তবে অপরটিও সেই সমতলের লম্ব হইবে।

২। পরিবৃত্তক্রমে, যদি দুটি ঋজুরেখার একটি কোন সমতলের লম্ব হয়, এবং অপরটিও সেই সমতলের লম্ব হয়, তবে সেই রেখা দুটি সমান্তর হইবে।

১। মনে কর **কখ** ॥ **গঘ** এবং ⊥ সমতল **ব**।

তাহা হইলে **গঘ** ⊥ সমতল **ব**।

মনে কর **কখ** এবং **গঘ**, **খ** এবং **ঘ**'তে সমতল **ব**'র সংলগ্ন।

খঘ যোগ কর, সমতল **ব**'তে **ঘঙ** ⊥ **খঘ** টান,

এবং **ঘঙ** তে যে কোন বিন্দু **ঙ** লইয়া, **কঙ**, **খঙ**, **ঘক** যোগ কর।

তাহা হইলে **কঙ**² = **কখ**² + **খঙ**² (∵ ∠**কখঙ** = সম ∠, কল্পনানুসারে)

= **কখ**² + **খঘ**² + **ঘঙ**² (∵ **ঘঙ** ⊥ **খঘ** (অঙ্কনানুসারে)

= **কঘ**² + **ঘঙ**² (∵ ∠**কখঘ** = সম ∠, কল্পনানুসারে)।

∴ **ঘঙ** ⊥ **ঘক** (১, উঃ প্রঃ ২২)। এবং **ঘঙ** ⊥ **ঘখ**।

∴ **ঘঙ** ⊥ সমতল **ঘকখ** (৪, উঃ প্রঃ ৪)।

এবং **কখ** ॥ **গঘ**, ∴ **গঘ**, সমতল **ঘকখ** তে স্থিত।

∴ **ঘঙ** ⊥ **গঘ**।

আবার, **গঘ** ॥ **কখ**, এবং ∠**কখঘ** = সম ∠,

∠**গঘখ** = সম ∠, এবং ∴ **গঘ** ⊥ **খঘ**।

∴ **গঘ** ⊥ **খঘ** এবং **ঘঙ**, এবং ∴ ⊥ সমতল **ব**।

২। মনে কর **কখ** এবং **গঘ** ⊥ সমতল **ব**।

তাহা হইলে **কখ** ॥ **গঘ**।

পূর্ব্ববত চিত্র অঙ্কিত করিলে,

কঙ² = **কখ**² + **খঙ**² = **কখ**² + **খঘ**² + **ঘঙ**² = **কঘ**² + **ঘঙ**²।

∴ **ঘঙ** ⊥ **কঘ**। এবং **ঘঙ** ⊥ **খঘ** (অঙ্কনানুসারে)।

এবং **ঘঙ** ⊥ **গঘ** (কল্পনানুসারে)।

∴ **ঘঙ** ⊥ **গঘ**, **কঘ**, **খঘ**।

এবং ∴ **গঘ**, **কঘ** এবং **খঘ**'র সহিত এক সমতলস্থ (২, উঃ প্রঃ ৫)।

∴ **গঘ** এবং **কখ** এক সমতলস্থ।

এবং ∠**কখঘ** = সম ∠ = ∠**গঘখ**।

∴ **কখ** ॥ **গঘ** (১, উঃ প্রঃ ৬)।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৭।

কোন সমতলের বাহিরের কোন বিন্দু হইতে সমতল পর্য্যন্ত যত ঋজুরেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে সমতলের উপর লম্বই ক্ষুদ্রতম। এবং সেই বিন্দু হইতে টানা অপর ঋজুরেখার মধ্যে যাহারা লম্বের পাদ হইতে সমান দূরে সমতলে সংলগ্ন, তাহারা পরস্পর সমান।

মনে কর **কখ** ⊥ সমতল **ব**, **কগ** অপর | ,

এবং **কঘ** আর একটি | এরূপে টানা হইয়াছে যে, **খগ** = **খঘ**।

তাহা হইলে **কখ** < **কগ**, এবং **কগ** = **কঘ**।

কারণ, ∠**কখগ** = সম∠ এবং ∴ > ∠**কগখ**,

∴ **কগ** < **কখ** (১, উঃ প্রঃ ১০)।

এবং △ **কখগ**, △ **কখঘ**তে, **খগ** = **খঘ**, **খক** উভয়েতেই আছে,

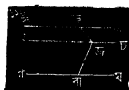
এবং ∠**কখগ** = সম∠ = ∠**কখঘ**,

∴ **কগ** = **কঘ** (১, উঃ প্রঃ ১২)।

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞা ১ম অধ্যায়ের ১০ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার অনুমানের অনুরূপ।

৪। স্থানে সমান্তর ঋজুরেখা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৮।

যে সকল যথাতথাস্থিত ঋজুরেখা, অর্থাৎ সকলে এক সমতলস্থিত না হইয়াও, কোন একটি ঋজুরেখার সমান্তর হয়, তাহারা দুটি দুটি করিয়া পরস্পর সমান্তর।

মনে কর যথাতথাস্থিত | **কখ** এবং | **গঘ** ॥ **ঙচ**।

তাহা হইলে **কখ** ॥ **গঘ**।

ঙচ'র কোন বিন্দু **জ** হইতে

ঙচ ও **কখ**'র সমতলে **জহ** ⊥ **ঙচ**,

এবং **ঙচ** ও **গঘ**'র সমতলে **জঝ** ⊥ **ঙচ**, টান।

তাহা হইলে ∵ **ঙচ** ⊥ **জহ**, **জঝ**,

∴ **ঙচ** ⊥ সমতল **হজঝ** (৪, উঃ প্রঃ ৪)।

এবং ∵ **কখ** ॥ **ঙচ**,

∴ **কখ** ⊥ সমতল **হজঝ** (৪, উঃ প্রঃ ৬)।

সেই কারণেই **গঘ** ⊥ সমতল **হজঝ**।

∴ **কখ** ॥ **গঘ** (৪, উঃ প্রঃ ৬)।

টিপ্পনী। এই প্রতিজ্ঞা ১, উঃ প্রতিজ্ঞা ৭ এর অনুরূপ।

৫। সমতলে ঋজুরেখার প্রক্ষেপণী।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—৯।

সমতলে ঋজুরেখার প্রক্ষেপণী একটি ঋজুরেখা।

মনে কর **কখ** একটি |, **ব** একটি সমতল।
তাহা হইলে **ব**'র উপর **কখ**'র প্রক্ষেপণী একটি |।
মনে কর **কগ**, **খঘ** ⊥ **ব**,
তাহা হইলে **কগ** ॥ **খঘ** (৪, উঃ প্রঃ ৬),
এবং ∴ **কগ**, **খঘ** একই সমতল **স**'তে স্থিত।
এবং | **কখ** ও সেই সমতল **স**'তে, ∵ **ক** ও **খ**, **স**'তে স্থিত।
মনে কর সমতল **ব** ও সমতল **স**'র ছেদরেখা **গঘ**,
তাহা হইলে **গঘ** একটি | (৪, উঃ প্রঃ ৩),
এবং **গঘ**, **ব** সমতলের উপর **কখ**'র প্রক্ষেপণী।
কারণ, **কখ**'র যে কোন বিন্দু **ঙ** হইতে **স** সমতলে **ঙচ** ⊥ **গঘ** টান,
তাহা হইলে **ঙচ** ॥ **কগ**, এবং ∴ ⊥ সমতল **ব**,
অর্থাৎ সমতল **ব**'তে **চ**, **ঙ**'র প্রক্ষেপণী।
এবং ঐরূপে সপ্রমাণ হইবে,
কখ'র অন্য যে কোন বিন্দুর প্রক্ষেপণী **গঘ** তে থাকিবে।
আবার, **গঘ**'র প্রত্যেক বিন্দুই **কখ**'র কোন এক বিন্দুর প্রক্ষেপণী।
কারণ, **গঘ**'র যে কোন বিন্দু **জ** হইতে **স** সমতলে **জহ** ॥ **কগ** টান,
তাহা হইলে **জহ** ⊥ **ব** (৪, উঃ প্রঃ ৬),
∴ **ব** সমতলে **জ**, **হ**'র প্রক্ষেপণী।

৬। পরস্পরের লম্ব ও সমান্তর ঋজুরেখা ও সমতল।

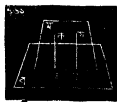
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১০।

যদি কোন সমতলের বাহিরে স্থিত একটি ঋজুরেখা সেই সমতলের ভিতরে স্থিত কোন ঋজুরেখার সমান্তর হয়, তাহা হইলে প্রথমোক্ত ঋজুরেখা সেই সমতলের সমান্তর হইবে।

মনে কর সমতল **ব**'র বাহিরে স্থিত | **কখ** ॥ **ব**'তে স্থিত | **গঘ**।
তাহা হইলে **কখ** ॥ সমতল **ব**।
কারণ, ∵ **কখ** ॥ **গঘ**,
∴ **কখ** ও **গঘ** একই সমতল **স**'তে স্থিত।
এবং সমতল **স** ও সমতল **ব**'র ছেদ রেখা **গঘ**।
অতএব যদি **কখ** বর্দ্ধিত করিলে সমতল **ব** তে মিলে,
তাহাদের সম্পাতবিন্দু অবশ্যই সমতল **ব** ও সমতল **স**'র
ছেদরেখা **গঘ**'তে থাকিবে,
অর্থাৎ **কখ**, **গঘ**'র সহিত মিলিবে।
কিন্তু তাহা অসম্ভব, ∵ **কখ** ॥ **গঘ**।
∴ | **কখ** ও সমতল **ব** মিলিতে পারে না।
এবং ∴ | **কখ** ॥ সমতল **ব**।

উপপাদ্য—প্রতিজ্ঞা—১১।

যদি কোন ঋজুরেখা কোন সমতলের লম্ব হয়, তাহা হইলে সেই ঋজুরেখা দিয়া যে কোন সমতল যাইবে তাহা প্রথমোক্ত সমতলের লম্ব হইবে।

মনে কর | **কখ** ⊥ সমতল **ব**,

তাহা হইলে | **কখ** দিয়া যাইতেছে এরূপ যে কোন সমতল **ম** ⊥ সমতল **ব**।

কারণ, **ব** ও **ম**'র ছেদরেখা **খগ**'র যে কোন বিন্দু **গ** হইতে

গঘ ⊥ **খগ** টান,

তাহা হইলে **গঘ** ॥ **কখ**, এবং **কখ** ⊥ **ব**,

∴ **গঘ** ⊥ **ব** (৪, উঃ প্রঃ ৬)।

সেইরূপে সপ্রমাণ হইবে যে,

সমতল **ম** স্থিত প্রত্যেক | যাহা ⊥ **খগ**, তাহা ⊥ **ব**,

অতএব সমতল **ম** ⊥ সমতল **ব**।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১২।

যদি দুটি সংলগ্ন সমতল তৃতীয় একটি সমতলের লম্ব হয়, তাহা হইলে প্রথমোক্ত সমতলদ্বয়ের ছেদরেখা ঐ তৃতীয় সমতলের লম্ব হইবে।

মনে কর সমতল **ম** ও সমতল **ন** ⊥ সমতল **ব**।

তাহা হইলে **ম** ও **ন**'র ছেদরেখা **কখ** ⊥ সমতল **ব**।

কারণ, যদি তাহা না হয়,

ম সমতলে **খ** হইতে **খঙ** ⊥ **ম** ও **ব**'র ছেদরেখা **খগ**'র উপর,
এবং **ন** সমতলে **খ** হইতে **খচ** ⊥ **ন** ও **ব**'র ছেদরেখা **খঘ**'র উপর, টান।
তাহা হইলে **খঙ, খচ** উভয়ই ⊥ সমতল **ব** (৪, পরিভাষা ২)।

কিন্তু তাহা অসম্ভব।

কারণ, মনে কর **খঙ, খচ**'র সমতলের সহিত **ব**'র ছেদরেখা **জহ,**
তাহা হইলে ∠**ঙখজ** = সম ∠ = ∠**চখজ,**

যাহা কখনই হইতে পারে না। (১, সঃ সিদ্ধ ৮)।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা ১৩।

যদি দুটি সমান্তর সমতলকে তৃতীয় একটি সমতল ছেদ করে, তবে সেই ছেদরেখাদ্বয় সমান্তর হইবে।

মনে কর **কখ** ও **গঘ** সমান্তর সমতল **ম** ও **ন**'র সহিত সমতল **ব**'র ছেদ রেখা।

তাহা হইলে **কখ** ॥ **গঘ**।

কারণ, **কখ** ও **গঘ** উভয়ই | (৮, উঃ প্রঃ ৩)।

এবং উভয়ই এক সমতল **ব**'তে স্থিত।

আবার যখন **কখ** ও **গঘ** দুটি সমান্তর সমতল স্থিত,

তখন তাহারা কখনও মিলিতে পারে না।

∴ **কখ** ॥ **গঘ**।

টিপ্পনী। সমতল **ম** স্থিত কোন ঋজুরেখাই সমান্তর সমতল **ন** স্থিত কোন ঋজুরেখার সহিত মিলিতে পারে না। কিন্তু সেই রেখাদ্বয় সমান্তর না হইতে পারে। তাহারা সমান্তর হইবে যদি তাহারা একই সমতলে থাকে, অর্থাৎ **ম** ও **ন**'র কোন তৃতীয় সমতলের সহিত ছেদ রেখা হয়।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৪।

যদি দুটি ঋজুরেখা তিনটি সমান্তর সমতল-দ্বারা ছেদিত হয়, তাহা হইলে তাহারা সমানুপাতে ছেদিত হইবে।

মনে কর | **কখও** | **গঘ**, সমান্তর সমতল **ম, ন, ব** দ্বারা **ক, ঙ, খ,** এবং **গ, চ, ঘ,** তে ছেদিত হইয়াছে।

তাহা হইলে $\frac{\text{কঙ}}{\text{ঙখ}} = \frac{\text{গচ}}{\text{চঘ}}$।

কঘ যোগ কর, মনে কর **কঘ, ন** দ্বারা **স**'তে ছেদিত,

এবং **সঙ, সচ** যোগ কর।

তাহা হইলে, ∵ সমতল **ন** ॥ সমতল **ব,**

এবং সমতল **কখঘ** উভয়কে ছেদ করিতেছে,

∴ **ঙস ॥ খঘ** (৪, উঃ প্রঃ ১৩),

এবং ∴ $\frac{\text{কঙ}}{\text{ঙখ}} = \frac{\text{কস}}{\text{সঘ}}$ (৩, উঃ প্রঃ ১)।

আবার, ∵ সমতল **ন** ॥ সমতল **ম,**

এবং সমতল **কঘগ** উভয়কে ছেদ করিতেছে,

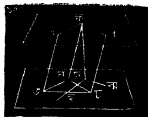
∴ **সচ ॥ কগ**।

এবং ∴ $\frac{\text{কস}}{\text{সঘ}} = \frac{\text{গচ}}{\text{চঘ}}$।

∴ $\frac{\text{কঙ}}{\text{ঙখ}} = \frac{\text{গচ}}{\text{চঘ}}$।

অনুমান ১। যদি দুটি সম্পাতী ঋজুরেখা যথাতথাস্থিত আর দুটি ঋজুরেখার সহিত সমান্তর হয়, তাহা হইলে,

(১) প্রথমোক্ত দুটির অন্তর্গত কোণ
অপর দুটির অন্তর্গত কোণের সমান, এবং

(২) প্রথমোক্ত রেখাদ্বয়ের সমতল
অপর দুটিরেখার সমতলের সমান্তর, হইবে।

মনে কর **কখ, কগ** যথাক্রমে ॥ **ঘঙ, ঘচ**।

তাহা হইলে, (১) ∠**খকগ** =∠**ঙঘচ**।

কারণ, **কখ,কগ**=**ঘঙ, ঘচ** করিয়া টান,

এবং **কঘ, খঙ, গচ. খগ, ঙচ** যোগ কর,

তাহা হইলে, ∵ **কখ**=এবং ॥ **ঘঙ**, ∴ **খঙ**=এবং ॥ **কঘ**।

এবং, ∵ **কগ**=এবং ॥ **ঘচ**, ∴ **কঘ**=এবং ॥ **গচ**।

এবং ∵ **খঙ**=এবং ॥ **গচ**, ∴ **খগ**=এবং ॥ **ঙচ**।

∴ △ **কখগ** ও △ **ঘঙচ** হইতে, ∠**খকগ**=∠**ঙঘচ**।

এবং (২) সমতল **কখগ** ॥ সমতল **ঘঙচ**।

কারণ, মনে কর, **কজ**⊥সমতল **ঘঙচ**,

এবং **জছ, জঝ** ॥ **কখ, কগ** টান।

তাহা হইলে, ∵ **কজ**⊥সমতল **ঘঙচ**,

∴ ∠**কজছ**, ∠**কজঝ**=সম ∠।

এবং ∵ **কখ, কগ** ॥ **জছ, জঝ**,

∴ ∠**জকখ**,∠**জকগ**=সম∠।

এবং ∴ কজ ⊥ সমতল কখগ ও সমতল ঘঙচ।

অতএব সমতল কখগ ∥ সমতল ঘঙচ।

কারণ, যদি তাহারা মিলিত হয়, তাহা হইলে,

তাহাদের ছেদরেখার যে কোন বিন্দু হইতে

ক ও জতে ঋজুরেখা টানিলে

তাহারা কজ'র সহিত সম ∠ উৎপন্ন করিবে,

এবং এক △এতে দুই সম ∠ থাকিবে,

কিন্তু তাহা হইতে পারে না। (১৭ উঃ প্রঃ ৮, অনুঃ ১)।

৭। ত্রিপৃষ্ঠ্য ঘন কোণ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৫।

ত্রিপৃষ্ঠ্য ঘন কোণের যে কোন পৃষ্ঠদ্বয়ের সামতলিক কোণদ্বয় একত্র অপর পৃষ্ঠের সামতলিক কোণ অপেক্ষা বড় হইবে।

মনে কর **ও** তে স্থিত ত্রিপৃষ্ঠ্য ঘন কোণ
∠**কওখ**, ∠ **খওগ**, ∠ **গওক** এই তিনটি
সামতলিক কোণের যোগে উৎপন্ন।
তাহা হইলে ঐ তিনটির মধ্যে যে কোন ছুটি,
∠**কওখ** + ∠ **কওগ** > ∠ **খওগ**।
যদি ∠ **খওগ** < বা = ∠ **কওখ** হয়,
তাহা হইলে প্রতিজ্ঞার সত্যতা স্পষ্টই প্রতীয়মান।
মনে কর ∠ **খওগ** > ∠ **কওখ**।
খও রেখায় **ও**'তে ∠ **খওঘ** = ∠ **কওখ** অঙ্কিত কর,
ওখ, **ওগ** তে **খ** এবং **গ** বিন্দু লইয়া **খগ** টান,
এবং মনে কর **খগ**, **ওঘ** কে **ঘ** তে ছেদ করিতেছে।
আর **ওক** = **ওঘ** করিয়া **কখ**, **কগ** যোগ কর।
তাহা হইলে △ **ওখক** এবং △ **ওখঘ** হইতে,
খক = **খঘ** (১, উঃ প্রঃ ১২)।

কিন্তু　**খক** + **কগ** > **খগ** (১, উঃ প্রঃ ১১)

অর্থাৎ > **খঘ** + **ঘগ**।

∴　**কগ** > **ঘগ**।

অতএব △ **কঙগ** এবং △ **ঘঙগ** তে,

ঙক = **ঙঘ**, **ঙগ** উভয়েতেই আছে,

কিন্তু　**কগ** > **ঘগ**।

∴　∠ **কঙগ** > ∠ **ঘঙগ** (১, উঃ প্রঃ ১৬)।

∴ ∠ **কঙখ** + ∠ **কঙগ** > ∠ **খঙঘ** + ∠ **ঘঙগ**

অর্থাৎ　> ∠ **খঙগ**।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৬।

যদি দুটি ত্রিপৃষ্ঠ্য ঘন কোণের একের পৃষ্ঠত্রয়ের সামতলিক কোণত্রয় যথাক্রমে অপরের পৃষ্ঠত্রয়ের সামতলিক কোণত্রয়ের সমান হয়, তাহা হইলে ঘন কোণদ্বয় সমান হইবে।

মনে কর ও এবং ও´ স্থিত ত্রিপৃষ্ঠ্য ঘন কোণদ্বয়ের
একের পৃষ্ঠ্য সামতলিক কোণত্রয় যথাক্রমে
অপরের পৃষ্ঠ্য সামতলিক কোণত্রয়ের সমান।
তাহা হইলে ঘন কোণদ্বয় সমান হইবে।

ওক তে যে কোন বিন্দু **ক** লইয়া **ও´ক´** = **ওক** করিয়া লও।
ওকখ, ওকগ সমতলে **কখ, কগ** ⊥ **ওক** টান, এবং
মনে কর **কখ, কগ. ওখ ওগ**'র সহিত **খ** এবং **গ**'তে মিলিত।
আর **ও´ক´খ´, ও´ক´গ´** সমতলে **ক´খ´, ক´গ´** ⊥ **ও´ক´** টান।
এবং মনে কর **ক´খ´** এবং **ক´গ´, ও´খ** এবং **ও´গ´**'র সহিত
খ´ এবং **গ´** তে মিলিত।
এবং **খগ, খ´গ´** যোগ কর।
তাহা হইলে △ **ওকখ** এবং △ **ও´ক´খ´** এতে
∴ ∠ **কওখ** = ∠ **ক´ও´খ´** (কল্পনানুসারে),
∠ **ওকখ** = ∠ **ও´ক´খ´** (উভয়েই সম ∠ বলিয়া),
এবং **ওক** = **ও´ক´** (অঙ্কনানুসারে),
∴ **ওখ** = **ও´খ´** (১, উঃ প্রঃ ১৪), **কখ** = **ক´খ´**।
ঐরূপে △ **ওকগ**, △ **ও´ক´গ´** হইতে **ওগ** = **ও´গ´**, **কগ** = **ক´গ´**।

অতএব △ **ওখগ**, △ **ও´খ´গ´** এতে

∵ **ওখ = ও´খ´**, **ওগ = ও´গ´**,

এবং ∠ **খওগ** = ∠ **খ´ও´গ´** (কল্পনানুসারে),

∴ **খগ = খ´গ´** (১, উঃ প্রঃ ১২)।

অতএব △ **কখগ**, △ **ক´খ´গ´** এতে **কখ = ক´খ´**, **কগ = ক´গ´**,

এবং **খগ = খ´গ´**,

∴ ∠ **খকগ** = ∠ **খ´ক´গ´** (১, উঃ প্রঃ ১৩),

অর্থাৎ পৃষ্ঠ বা সমতল **কওগ**'র উপর

পৃষ্ঠ বা সমতল **কওখ**'র অবনতি (৪, পরিভাষা ৪)

= পৃষ্ঠ বা সমতল **ক´ও´গ´**'র উপর পৃষ্ঠ **ক´ও´খ´**'র অবনতি।

সেইরূপে দেখা যাইবে,

পৃষ্ঠ **খওগ**'র উপর পৃষ্ঠ **কওখ** এবং পৃষ্ঠ **কওগ**'র অবনতি

= পৃষ্ঠ **খ´ও´গ´**'র উপর পৃষ্ঠ **ক´ও´খ´** এবং পৃষ্ঠ **ক´খ´গ´**'র অবনতি।

অতএব যদি পৃষ্ঠ্য কোণগুলি সমভাবেস্থিত হয়,
তাহা হইলে ঘনকোণদ্বয়ের একের মধ্যে অপরকে ঠিক স্থাপিত করা যাইবে,
এবং তাহাতেই তাহাদের সাম্য সপ্রমাণ হইবে। (১, স্বঃ সিঃ ৯)।

যদি পৃষ্ঠ্য কোণগুলি সমভাবে স্থিত না হয়,
তাহা হইলে ঘন কোণদ্বয়ের একের কোন এক পৃষ্ঠ্য কোণ
অপরের তৎসমান পৃষ্ঠ্য কোণের উপর স্থাপিত করিলে
দেখা যাইবে যে, ঘন কোণদ্বয়
সেই সংলগ্ন পৃষ্ঠদ্বয়ের দুই পার্শ্বে সমভাবেস্থিত, এবং
তাহাদের সৌসাদৃশ্য হইতে তাহাদের সাম্য প্রতীয়মান হইবে।

টিপ্পনী ১। যে স্থলে **ক** হইতে **ওক**'র উপর টানা লম্বদ্বয় **ওখ**, **ওগ**'র সহিত মিলিত হয় না, সে স্থলের প্রমাণের ভার অনুশীলনার্থে বিদ্যার্থীর উপর রহিল।

টিপ্পনী ২। এই প্রতিজ্ঞার প্রমাণে দেখা যাইতেছে, এবং মনে রাখা আবশ্যক হয়, সমান আয়তন দ্বয় সকল স্থলে ঠিক একই স্থানে স্থাপিত, অর্থাৎ একের উপর অপরটি ঠিক অবস্থিত, করা যায় না। এবং ১ম অধ্যায়ের ৯ স্বতঃ সিদ্ধের পরিবৃত্ত বাক্য সর্বত্র সত্য নহে।

৮। কুব্জ ঘনকোণ।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৭।

যে কোন কুব্জ ঘনকোণের পৃষ্ঠ্য কোণ সমষ্টি চারি সমকোণের ন্যূন।

মনে কর **ও** স্থিত ঘন কোণ

পৃষ্ঠ্য কোণ **কওখ**, **খওগ**, **গওঘ**, **ঘওঙ** এবং **ঙওক** দ্বারা উৎপন্ন।

তাহা হইলে তাহাদের সমষ্টি < ৪ সম ∠।

মনে কর পৃষ্ঠ্য কোণের সমতলগুলি একটি সমতল দ্বারা ছেদিত হইয়াছে,

এবং **কখ**, **খগ**, **গঘ**, **ঘঙ**, **ঙক** সেই ছেদরেখা,

আর মনে কর **কখগঘঙ** ক্ষেত্র মধ্যে যে কোন বিন্দু **স** লইয়া,

সক, **সখ**, **সগ**, **সঘ**, **সঙ** টানা হইয়াছে।

(শেষোক্ত রেখাগুলি চিত্রে অঙ্কিত হয় নাই।)

তাহা হইলে **ও** স্থিত পৃষ্ঠ্য কোণ সকল

+ △ **ওকখ**, △ **ওখগ** ইত্যাদির ভূমি সংলগ্ন কোণের সমষ্টি

= △ **ওকখ**, △ **ওখগ** ইত্যাদির সমস্ত কোণ সমষ্টি

= যতগুলি △ আছে তাহার দ্বিগুণ সম ∠

= △ **সকখ**, △ **সখগ** ইত্যাদির সমস্ত কোণ সমষ্টি

(∵ △এর সংখ্যা উভয় স্থলেই সমান)

= **কখগঘঙ** ক্ষেত্রের সমস্ত ∠ + **স** স্থিত সমস্ত ∠

= **কখগঘঙ**'র সমস্ত ∠ + ৪ সম ∠।

এখন **ক, খ, গ, ঘ,** ঙ স্থিত প্রত্যেক ঘন কোণ
এক একটি ত্রিপৃষ্ঠ্য ঘন কোণ
যাহার ২টি পৃষ্ঠ্য ∠, △ **ওকখ,** △ **ওখগ** ইত্যাদির ভূমি সংলগ্ন ∠,
এবং একটি পৃষ্ঠ্য ∠, **কখগঘঙ**'র ∠।
এবং ∵ ঐ কোণত্রয়ের দুটির সমষ্টি > তৃতীয়টি,
∴ △ **ওকখ,** △ **ওখগ** প্রভৃতির ভূমিসংলগ্ন কোণ সমষ্টি
> **কখগঘঙ**'র কোণ সমষ্টি,
এবং ∴ **ও** স্থিত পৃষ্ঠা কোণ সমষ্টি < ৪ সম ∠।

অনুমান। সমবাহু সমানকোণী সমান পৃষ্ঠ পরিবেষ্টিত ঘনয়াতন পাঁচ প্রকারের অধিক হইতে পারে না।

কারণ, ঐরূপ ঘনয়াতনের প্রত্যেক ঘনকোণকে অবশ্যই দুটি নিয়মাধীন হইতে হইবে,

(১) তাহার পৃষ্ঠ্য সামতলিক কোণের সংখ্যা তিনের অন্যূন হইবে, এবং

(২) তাহার পৃষ্ঠ্য সামতলিক কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের ন্যূন হইবে।

অতএব পঞ্চভুজের অধিক বাহু বিশিষ্ট সমবাহু সমানকোণী ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র ঐরূপ ঘনয়াতনের পৃষ্ঠ হইতে পারে না,

কারণ, ঐরূপ ক্ষেত্রের তিন কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের ন্যূন নহে
(১, উঃ প্রঃ ৮, অনুঃ ৫)।

আবার সমবাহু ত্রিভুজের ৫ অপেক্ষা অধিক সংখ্যক কোণ, এবং সমবাহু সমানকোণী চতুর্ভুজ ও পঞ্চভুজের ৩ অপেক্ষা অধিক সংখ্যক কোণ,
ঐরূপ ঘনয়াতনের ঘনকোণের পৃষ্ঠ্য কোণ হইতে পারে না,
কারণ, তাহাদের সমষ্টি ৪ সমকোণের ন্যূন নহে।

অতএব উক্তরূপ ঘনয়াতন যে যে প্রকারের হওয়া সম্ভবপর
তাহা কেবল এই—
অর্থাৎ যাহার ঘন কোণের পৃষ্ঠ্যকোণ—

(১)	সমবাহু ত্রিভুজের	৩ ∠,	(যথা চতুষ্পৃষ্ঠ),
(২)	"	৪ ∠,	(যথা অষ্টপৃষ্ঠ),
(৩)	... "	৫ ∠,	(যথা বিংশতি পৃষ্ঠ),
(৪)	.. সমকোণী চতুর্ভুজের	৪ ∠,	(যথা ষট্পৃষ্ঠ),
(৫)	... সমান কোণী পঞ্চভুজের	৩ ∠,	(যথা দ্বাদশ পৃষ্ঠ)।

টিপ্পনী। কাগজ কাটিয়া ঐরূপ ঘনায়াতন প্রস্তুত করিবার প্রণালী এই অধ্যায়ের ৩ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞায় দর্শিত হইয়াছে।

৯। ফলক, সামান্তরিক পৃষ্ঠ, ও সূচীর ঘন ফল।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৮।

সমান ও সদৃশভূমি স্থিত এবং সমান উচ্চতা বিশিষ্ট সোজা ফলক সকল পরস্পর সমান।

মনে কর **কখগঘঙ—চজহঝঞ** এবং **ক´খ´গ´ঘ´ঙ´-চ´জ´হ´ঝ´ঞ´**,
সমান ও সদৃশ **কখগঘঙ** এবং **ক´খ´গ´ঘ´ঙ´** ভূমিস্থিত,
কচ এবং **ক´চ´** সমান উচ্চতা বিশিষ্ট, দুটি সোজা ফলক।
তাহা হইলে তাহারা পরস্পর সমান।
কারণ, যদি ফলক **ক´খ´গ´ঘ´ঙ´—চ´জ´হ´ঝ´ঞ´**,
ফলক **কখগঘঙ-চজহঝঞ**'র উপর
এরূপে স্থাপিত করা যায় যে,
ক´, **ক**'র উপর এবং | **ক´খ´**, | **কখ**'র উপর পড়ে,

তাহা হইলে **খ´**, **খ**'র উপর পড়িবে, ∵ **ক´খ´ = কখ**,
| **খ´গ´**, | **খগ**'র উপর পড়িবে, ∵ ∠**ক´খ´গ´** = ∠**কখগ**,
এবং **গ´**, **গ**'র উপর পড়িবে; ∵ **খ´গ´ = খগ**।
ইত্যাদি।　　ইত্যাদি।

অর্থাৎ ক্ষেত্র **ক´খ´গ´ঘ´ঙ´** ক্ষেত্র **কখগঘঙ**'র উপর পড়িবে।

আবার ক´চ´, কচ'র উপর পড়িবে, ∵ উভয়েই ⊥ ভূমি,
এবং চ´, চ'র উপর পড়িবে, ∵ ক´চ´ = কচ।

এবং সেই কারণে, জ´,হ´,ঝ´,এ´, ইহারা জ, হ, ঝ, এ'র উপর পড়িবে।

এবং সমস্ত ফলক ক´খ´গ´ঘ´ঙ´—চ´জ´হ´ঝ´এ´,
ফলক কখগঘঙ —চজহঝএ'র সহিত
এক স্থানে থাকিবে।

অতএব ফলকদ্বয় পরস্পর সমান।

টিপ্পনী। উপরে মানিয়া লওয়া হইয়াছে যে, ফলকদ্বয় ভিতরে শূন্য এবং বাহিরে তাহাদের ভূমি ও পৃষ্ঠ কাল্পনিক সমতল এবং অনায়াসে ছেদ্য।

অনুমান ১। সমান উচ্চতা বিশিষ্ট এবং সমান সামান্তরিক ভূমি-স্থিত সোজা ফলকদ্বয় সমান।

কারণ, প্রত্যেক ভূমিকেই তাহার একটি বাহুর উপর তৎসমান ক্ষেত্রফলের আয়তে সহজে পরিবর্ত্তিত করা যায়, এবং এরূপ খণ্ডে বিভক্ত করা যায় যে, সেই খণ্ডগুলি ঠিক আয়তের স্থানে বসিবে (১, উঃ প্রঃ ১৮, টিপ্পনী ১)। এবং প্রত্যেক ভূমিস্থ ফলককে,ভূমির ভাগানুসারে ভূমির উপর লম্ব সমতল দ্বারা খণ্ডে খণ্ডে বিভক্ত করিয়া, আয়ত ভূমিস্থিত সম উচ্চতা বিশিষ্ট ফলকে পরিবর্ত্তিত করা যাইতে পারে। তাহা হইলে উভয় ফলকের আয়ত ভূমি সমান হইবে। তদনন্তর উপযুক্ত রৈখিক এক নির্ব্বাচিত করিয়া উভয় পরিবর্ত্তিত ফলকের আয়ত ভূমিকে সমান ও সমসংখ্যক রৈখিক একের বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত করা যাইতে পারে, এবং প্রত্যেক বর্গ ক্ষেত্রের উপর তাহার সীমা রেখা দিয়া লম্ব সমতল টানিয়া, তদুপরি এক একটি সোজা ফলক উৎপন্ন করা যাইতে পারে। আর তাহা হইলে প্রত্যেক আয়ত ভূমিস্থ সোজা ফলক, সমসংখ্যক সমান বর্গক্ষেত্র ভূমিস্থ সোজা ফলকখণ্ডে বিভক্ত হইবে। এই শেষোক্ত ফলক খণ্ডগুলি স্পষ্টই পরস্পর সমান। এবং তাহা হইলে মূল ফলকদ্বয়ও অবশ্যই সমান।

অনুমান ২। ইহা হইতে দেখা যাইতেছে, সমান ত্রিভুজভূমিস্থ সমান উচ্চতাবিশিষ্ট সোজা ফলকদ্বয় সমান।

কারণ, তাহারা স্পষ্টই প্রত্যেকে সমান সামান্তরিক ভূমিস্থ সমান উচ্চতা বিশিষ্ট ফলকের অর্দ্ধেক, এবং শেষোক্ত প্রকারের ফলকদ্বয় উপরের ১ অনুমানানুসারে সমান।

অনুমান ৩। সাধারণতঃ, সমান উচ্চতা বিশিষ্ট সমান ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র ভূমিস্থ সোজা ফলকদ্বয় পবস্পর সমান।

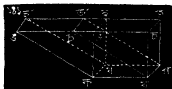
কারণ, ১ম অধ্যায়ের ১০ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞায় প্রদর্শিত প্রণালী অনুসারে, প্রত্যেক ভূমিই ত্রিভুজে বিভক্ত করা যাইতে পারে। এবং সেই সকল ত্রিভুজের বাহু দিয়া ভূমির উপর লম্ব সমতল টানিলে প্রত্যেক ফলক কতকগুলি ত্রিভুজ ভূমিস্থিত সোজা ফলকে বিভক্ত হইবে। আর উপরের ২ অনুমান অনুসারে এই শেষোক্ত সোজা ফলকগুলি প্রত্যেকেই স্ব স্ব ত্রিভুজ ভূমির সমান অন্য ত্রিভুজভূমিস্থ সোজা ফলকের সমান হইবে। সুতরাং প্রত্যেক মূলভূমি ১ম অধ্যায়ের ১০ সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞানুসারে তত্তুল্য ত্রিভুজে পরিবর্ত্তিত করিলে, প্রত্যেক মূলফলক শেষোক্ত ত্রিভুজ ভূমিস্থিত সমান উচ্চতা বিশিষ্ট সোজা ফলকে পরিবর্ত্তিত হইতে পারিবে। এবং সেই শেষোক্ত ত্রিভুজভূমিদ্বয় যখন সমান, তখন উপরের ২ অনুমানানুসারে তদ্রূপবিস্থিত সমান উচ্চতা বিশিষ্ট পরিবর্ত্তিত ফলকদ্বয় অবশ্যই সমান।

অনুমান ৪। যদি একটি ফলকের ভূমি এবং পৃষ্ঠগুলি অপর একটি ফলকের ভূমি ও পৃষ্ঠগুলির সহিত যথাক্রমে সর্ব্বাংশে সমান হয়, তবে ফলকদ্বয় সমান হইবে।

কারণ, উভয় ফলকেরই প্রত্যেক ঘন কোণ ত্রিপৃষ্ঠ্য কোণ। এবং এক ফলকের প্রত্যেক ঘনকোণ যে যে পৃষ্ঠ্যকোণের যোগে উৎপন্ন, অপর ফলকের তদনুরূপ ঘনকোণ তত্তুল্য পৃষ্ঠ্যকোণত্রয়ের যোগে উৎপন্ন। সুতরাং এক ফলকের ঘন কোণগুলি যথাক্রমে অপর ফলকের ঘন কোণগুলির সমান (৪, উঃ প্রঃ ১৬)।

এবং এক ফলকের ধার অর্থাৎ পৃষ্ঠযোজক রেখাগুলি যথাক্রমে অপর ফলকের ধারগুলির সহিত সমান। অতএব ফলকদ্বয় একের উপর অপরটি স্থাপিত হইতে পারে, এবং তাহারা অবশ্যই সমান হইবে।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—১৯।

একই ভূমিস্থিত এবং সমান উচ্চতাবিশিষ্ট সামান্তরিক পৃষ্ঠদ্বয় পরস্পর সমান।

১ চিত্র।

মনে কর **কখগঘ—ঙচজহ** এবং **কখগঘ—ঙ´চ´জ´হ´**
দুটি সামান্তরিক পৃষ্ঠ একই ভূমি **কখগঘ** স্থিত এবং সমান উচ্চতা বিশিষ্ট।
তাহা হইলে তাহারা পরস্পর সমান।

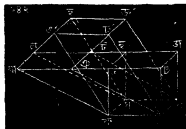
প্রথমতঃ মনে কর তাহাদের দুটি ধার **ঙচ, ঙ´চ´**
একই ঋজুরেখাতে, যথা ১ম চিত্রে।

তাহা হইলে **জহ, জ´হ´** ও একই | তে, এবং ‖ **ঙচ, ঙ´চ´**।

এবং ∵ **ঙচ=কখ=ঙ´চ´**, ∴ **ঙঙ´=চচ´**।

আর সেই কারণে **জজ´=হহ´**।

এবং **কঘ=খগ, কঙ=খচ, কঙ´=খচ´**।

অতএব ফলক **কঙঙ´—ঘহহ´** এবং ফলক **খচচ´—গজজ´**
ইহাদের ভূমি ও পৃষ্ঠ সর্ব্বাংশে সমান,
সুতরাং তাহারা সমান (৪, উঃ প্রঃ ১৮, অনুঃ ৪)।
এই সমান ফলকদুটি যথাক্রমে চিত্রের সমস্ত ঘনায়তন হইতে বাদ দিলে,
বাকি সামান্তরিক পৃষ্ঠ **কখগঘ—ঙচজহ**
=বাকি সামান্তরিক পৃষ্ঠ **কখগঘ—ঙ´চ´জ´হ´**।

২ চিত্র।

দ্বিতীয়তঃ মনে কর ঙচ এবং ঙ´চ´
একই ঋজুরেখায় নহে, যথা ২য় চিত্রে।
হ´ঙ´ এবং জ´চ´কে বৰ্দ্ধিত করিয়া
চঙ, জহ'র সহিত ঝ, ল, ঞ, টতে মিলাইয়া দেয়।
তাহা হইলে পূৰ্ব্ববৰ্ত্তী প্রমাণানুসারে,
কখগঘ – ঙচজহ এবং **কখগঘ – ঙ´চ´জ´হ´**
প্রত্যেকেই = **কখগঘ – ঝঞটল,**
অতএব তাহারা পরস্পর সমান।

অনুমান ১। যদি কোন সমকোনী সামান্তরিক পৃষ্ঠের তিনটি সংলগ্ন ধারে অর্থাৎ **কখ**, **খগ**, ও **খঘ**তে, অর্থাৎ তাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ও বেধে, অ, ই, উ, বৈখিক এক থাকে, তাহা হইলে, সেই সমকোণী সামান্তরিক পৃষ্ঠে অ × ই × উ ঘন এক অর্থাৎ ঘনক্ষেত্র থাকিবে। আর এই কথা সংক্ষেপে এইরূপে বলা যায় –

যদি কোন সমকোনী সামান্তরিক পৃষ্ঠের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ও বেধ, যথাক্রমে =অ, ই, উ, হয়

তবে তাহার ঘনফল = অইউ।

কারণ, যদি ঐ ধার তিনটি, অ, ই, উ, ভাগে ভাগ করা যায়, এবং ভাগের চিহ্ন দিয়া সমতল টানা যায়॥ সামান্তরিকপৃষ্ঠের তিনটি সংলগ্ন পৃষ্ঠ, তাহা হইলে ঐ সামান্তরিকপৃষ্ঠ ছোট ছোট ঘনক্ষেত্রে বিভক্ত হইবে, এবং ঐ প্রত্যেক ঘনক্ষেত্রের ধার বৈখিক একের সমান হইবে, আর ঐ ঘনক্ষেত্রের সংখ্যা

= এক স্তরের ঘনক্ষেত্রের সংখ্যা
× স্তরের সংখ্যা
= **ঘচজহ**তে বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা
× **খঘ**তে বৈখিক একের সংখ্যা
= অ × ই × উ।

টিপ্পনী ১। ১ম অধ্যায়ের ২০, ২১ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার টিপ্পনীতে যাহা বলা হইয়াছে তাহা মনে রাখিলে বুঝা যাইবে, অ, ই, উ, অখণ্ড বা খণ্ড রাশি, পরিমেয় বা অপরিমেয় রাশি, হইতে পারে।

টিপ্পনী ২। এই প্রতিজ্ঞা ১ অধ্যায়ের ১৮উঃ প্রতিজ্ঞার অনুরূপ।

অনুমান ২। —সামান্তরিক পৃষ্ঠের ঘনফল
= ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা।

কারণ যে কোন সামান্তরিক পৃষ্ঠ, একই ভূমিস্থ সমান উচ্চ এবং ভূমির উপর লম্ব পৃষ্ঠবিশিষ্ট, অপর একটি সামান্তরিক পৃষ্ঠের সমান। এবং এই অপর সামান্তরিক পৃষ্ঠ একটি সোজা ফলক, সুতরাং তাহা সমান উচ্চ সমান আয়তভূমিস্থিত সামান্তরিক পৃষ্ঠের সমান (২, উঃ প্রঃ ১৮, অনুঃ ১)। আর এই শেষোক্ত সামান্তরিক পৃষ্ঠের ঘনফল, পূর্ববর্ত্তিঅনুমানানুসারে তাহার ভূমি এবং উচ্চতার গুণফলের সমান।

অনুমান ৩। সামান্তরিক পৃষ্ঠের কর্ণ সমতল, অর্থাৎ কোণাকোণী সমতল, তাহাকে দুটি ত্রিভুজভূমিস্থ সমান ঘনফলের ফলকে বিভক্ত করে, এবং সেই প্রত্যেক ফলকের ঘনফল

= সামান্তরিক পৃষ্ঠের ঘনফলের অর্দ্ধেক
= $\frac{1}{2}$ × সামান্তরিক পৃষ্ঠের ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা
= ফলকের ত্রিভুজভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা।

অনুমান ৪। যে হেতুক প্রত্যেক ফলকের ভূমিকে ত্রিভুজ সমূহে বিভক্ত করিয়া তাহাকে ত্রিভুজভূমিস্থিত ফলকসমূহে বিভক্ত করা যায়, অতএব, যে কোন ফলকের ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২০।

সমান উচ্চতাবিশিষ্ট, এবং সমান ক্ষেত্রফলের ভূমির উপরিস্থ সূচীদ্বয় পরস্পর সমান।

১ চিত্র।

২ চিত্র।

মনে কর **ও—কখগঘ, ও′—ক′খ′গ′,**
সমান উচ্চতাবিশিষ্ট এবং **কখগঘ, ক′খ′গ′** সমান ভূমিস্থ ছুটি সূচী।
তাহা হইলে তাহারা পরস্পর সমান হইবে।
উভয় উচ্চতাকে সমান ন ভাগে ভাগ করিয়া ভাগচিহ্ন দিয়া প্রত্যেক সূচীর ভূমির ॥ সমতল টান।
তাহা হইলে প্রত্যেক সূচীতে সেই সকল সমতলের ছেদক্ষেত্রগুলি
সদৃশ ও ভূমির সমানুপাতী হইবে। (৪, উঃ প্রঃ ১৩, ১৪, ৩, উঃ প্রঃ ৮)।
এবং ভূমিদ্বয় যখন সমান, তখন
এক সূচীর ছেদক্ষেত্রগুলি যথাক্রমে অপর সূচীর ছেদক্ষেত্রগুলির সমান হইবে।

এখন মনে কর, এই ছেদক্ষেত্রগুলির উপর ১ম চিত্রে তাহাদের নীচের পৃষ্ঠে, ২য় চিত্রে তাহাদের উপর পৃষ্ঠে, ফলক অঙ্কিত করা হইল, যাহাদের উচ্চতা $= \frac{১}{ন}$ × মূল সূচীর উচ্চতা। তাহা হইলে এক সূচীস্থিত ফলকগুলি যথাক্রমে অপর সূচীস্থিত ফলকগুলির সমান হইবে,

কারণ, তাহাদের ভূমি এবং উচ্চতা সমান (৪, উঃ প্রঃ ১৯, অনুঃ ৪)।

মনে কর ভ, ভ´, সূচীদ্বয়ের ঘনফল,

স, স´, সূচীদ্বয়স্থিত ফলক সমষ্টির ঘনফল।

তাহা হইলে স´—স=ও´—ক´খ´গ´ স্থিত নিম্নতম ফলকের ঘনফল।
কিন্তু ন কে অসীমরূপে বর্দ্ধিত করিলে সেই নিম্নতম ফলকের উচ্চতা ও ঘনফল অসীমরূপে হ্রাস পাইবে, এবং পরিশেষে লোপ পাইবে।

অতএব পরিশেষে স´=স।

এবং তখন ভ এবং স'র অন্তরও ভ´ এবং স´'র অন্তর উভয়ই লোপ পাইবে।

কারণ, ফলকগুলির উচ্চতা যত কম হইবে,

প্রত্যেক ফলক এবং সেই স্তবের সূচীখণ্ডের প্রভেদ ততই কম হইবে।

এবং ভ=স=স´=ভ´ হইবে।

অনুমান ১। ত্রিভুজভূমিস্থিত সূচী, **ঘ—কখগ**'র ঘনফল একই ভূমিস্থিত সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ফলক **কখগ—ঘঙচ**'র ঘনফলের তিন অংশের একাংশ।

সমতল **গঘখ** ও **ঙগঘ** টান। তাহা হইলে, সূচীদ্বয় **গ—কঘখ, গ—ঙখঘ,** যাহাদের ভূমিদ্বয় **কঘখ, ঙখঘ** সমান, এবং উচ্চতা, **গ** হইতে **কখঙঘ** সমতলে লম্ব, পরস্পর সমান।

এবং সূচীদ্বয় **গ—কখঘ, গ—ঘঙচ,** যাহাদের ভূমিদ্বয় **কখগ, ঘঙচ** সমান,

এবং উচ্চতা সমতল **কখগ** ও সমতল **ঘঙচ**'র অন্তর, পরস্পর সমান।

অতএব ফলক **কখগ—ঘঙচ** তিনটি সমান সূচী

গ—কঘখ, গ—ঙখঘ এবং **গ—ঘঙচ**তে বিভক্ত হইয়াছে।

সুতরাং সূচী **গ—কখঘ** অর্থাৎ **ঘ—কখগ**

$=\frac{1}{3}$ ফলক **কখগ—ঘঙচ**।

অনুমান ২। সূচীমাত্রেরই ঘনফল সমান ভূমিস্থিত সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ফলকের ঘনফলের তিন অংশের একাংশ।

কারণ, সূচীমাত্রেরই ভূমিকে ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়া সেই ত্রিভুজ সমূহের বাহু ও সূচীর শীর্ষবিন্দু দিয়া সমতল টানিয়া, সেই সূচীকে ত্রিভুজ-ভূমিস্থিত সমান উচ্চতাবিশিষ্ট সূচী সমূহে বিভক্ত করা যাইতে পারে। এবং তদনন্তর তৎসম্বন্ধে পূর্ব্ববর্ত্তিঅনুমান খাটান যাইতে পারে।

অনুমান ৩। সূচীর ঘনফল
= ⅓ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা।

১০। বৃত্তসূচী, স্তম্ভ, ও গোলকের ঘনফল।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২১।

সোজা বৃত্তসূচীর ঘনফল সমান ভূমিস্থিত সমান উচ্চতাবিশিষ্ট সোজা স্তম্ভের ঘনফলের তিন অংশের একাংশ।

কারণ, বৃত্তভূমি, **ওকক**, এর মত অসীমবৃহৎসংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বৃত্তচ্ছেদকে বিভক্ত হইতে পারে।

আর তাহাদের প্রত্যেককে এক একটি ত্রিভুজ মনে করা যাইতে পারে। এবং তাহাদের উপর বৃত্তসূচীর উচ্চতা বিশিষ্ট সোজা ফলক ও সোজা সূচী অঙ্কিত হইয়াছে, ও সেই সূচীসমূহের শীর্ষ বৃত্তসূচীর শীর্ষ, মনে করা যাইতে পারে।

তাহা হইলে, প্রত্যেক সূচীর ঘন ফল $=\frac{1}{3}$ তৎসংসৃষ্ট ফলকের ঘনফল।
এবং পরিশেষে যখন ঐ ঘনফলের সমষ্টিদ্বয়
বৃত্তসূচীর ও স্তম্ভের ঘনফলদ্বয়ের তুল্য,
তখন বৃত্তসূচীর ঘনফল $=\frac{1}{3}$ স্তম্ভের ঘনফল।

অনুমান ১। যদি ব = বৃত্তভূমির ব্যাসার্দ্ধ,
হ = বৃত্তসূচীর উচ্চতা,
তাহা হইলে স্তম্ভের ঘনফল = পর^2 হ,
বৃত্তসূচীর ঘনফল $=\frac{1}{3}$পর^2 হ।

অনুমান ৯।

স্তম্ভের কুব্জ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ২ পরহ।

(কুব্জ পৃষ্ঠকে **কক, ক, ক**´ এর মত ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র আয়তে বিভক্ত করিলে এই ক্ষেত্র ফল পাওয়া যায়)।

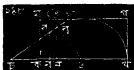
বৃত্তসূচীর কুব্জ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \frac{২পরহ´}{২}$,

যথায় হ´ = বৃত্তসূচীর গড়ান উচ্চতা, বা ঘূর্ণ্যমান সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণ, **ওক**।

(কুব্জ পৃষ্ঠকে **কক, ও**´এর মত ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ত্রিভুজে বিভক্ত করিলে এই ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়)।

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা—২২।

গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বহিরঙ্কিত স্তম্ভের কুব্জপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের সমান।

এবং গোলকের ঘনফল বহিরঙ্কিত স্তম্ভের ঘনফলের তিন অংশের দুই অংশ।

মনে কর **কবখ** একটি অর্দ্ধবৃত্ত যাহার কেন্দ্র **ও**, ব্যাসার্দ্ধ = র,
এবং **কখগঘ**, আয়ত বা বৃত্তের বহিরঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্দ্ধেক।

তাহাদেরই ঘূর্ণনদ্বারা গোলক ও স্তম্ভ উৎপন্ন হইবে।

মনে কর **বব´** O'র দুটি অতি সন্নিহিত বিন্দু,
　　সুতরাং **পবব´**, **ব**'তে ⊙ এর স্পর্শিনী।

ওব যোগ কর, **ঙবন**, **ঙ´ব´ন´** ⊥ **কখ** টান,
　　এবং মনে কর **পবব´**, **খক**'র সহিত **চ**'তে মিলিত।

তাহা হইলে $\frac{\text{বব´}}{\text{ঙঙ´}} = \frac{\text{বপ}}{\text{ঙপ}}$ (৩, উঃ প্রঃ ১)

$= \frac{\text{ওব}}{\text{বন}}$ (সদৃশ △ **ঙবপ**, △ **নওব** হইতে)

$= \frac{\text{ঙন}}{\text{বন}}$ (∵ **ঙন** = **ওব**)।

∴ **বন · বব´ = ঙন · ঙঙ´**।

এখন জ্যা বব´ এর ঘূর্ণনজনিত পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

= বৃত্তসূচী যাহার শীর্ষ চ তাহার কুব্জ পৃষ্ঠের একফালির ক্ষেত্রফল

= ½ × ২ য বন·বচ − ½ × ২ য ব´ন´ · ব´চ

$=$ ২য × ½ (বন·বচ − বন · $\frac{\text{ব´চ}}{\text{বচ}}$ · ব´চ) (∵ $\frac{\text{ব´ন´}}{\text{বন}} = \frac{\text{ব´চ}}{\text{বচ}}$)

$=$ ২য × $\frac{\text{বন}}{\text{বচ}}$ × ½(বচ² − ব´চ²)

$=$ ২য × $\frac{\text{বন}}{\text{বচ}}$ × ½(বচ + ব´চ) (বচ − ব´চ)

$=$ ২য × $\frac{\text{বন}}{\text{বচ}}$ × ½(বচ + ব´চ) বব´

= ২য × বন বব´, পরিশেষে,

যখন জ্যা বব´ ও চাপ বব´ মিলিত হইবে,

এবং বচ = ব´চ, সুতবাং ½ (বচ + ব´চ) = বচ হইবে।

অতএব বব´ এর ঘূর্ণন জনিত গোলক পৃষ্ঠের মণ্ডল

= ২য·বন·বব´

= ২য·ঙন·ঙঙ´ (∵ বন·বব´ = ঙন·ঙঙ´)

= ঙঙ´ এর ঘূর্ণন জনিত স্তম্ভের কুব্জ পৃষ্ঠের মণ্ডল।

∴ সমস্ত গোলকপৃষ্ঠ = স্তম্ভের সমস্ত কুব্জ পৃষ্ঠ = ২ যর × ২ব

= ৪ যর²।

গোলকের ঘনফল নির্ণয়ার্থে,

মনে কব, গোলক পৃষ্ঠের তিনটি সন্নিহিত বিন্দু লইয়া একটি ত্রিভুজ হইল, সমস্ত গোলক পৃষ্ঠ ঐরূপ অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ত্রিভুজে বিভক্ত হইল,

এবং ঐরূপ প্রত্যেক ত্রিভুজকে ভূমি, ও কেন্দ্রকে শীর্ষ, করিয়া এক একটি সূচী অঙ্কিত হইল।

তাঁহা হইলে গোলকের ঘনফল = ঐ সূচী সমূহের ঘন ফল।

এবং　প্রত্যেক সূচীর ঘনফল = $\frac{১}{৩} \times র \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল।

∴ সূচীর সমষ্টিব ঘনফল = $\frac{১}{৩} \times র \times$ ভূমি সমষ্টির ক্ষেত্রফল

= $\frac{১}{৩} \times র \times$ গোলক পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

= $\frac{১}{৩} \times র \times$ ৪ পর^{২} = $\frac{৪}{৩}$ পর^{৩}।

∴ গোলকের ঘন ফল = $\frac{৪}{৩}$ পর^{৩}।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা।

১। সমতলের ও ঋজুরেখার উপর লম্ব অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—১।

সমতলের বাহিরে স্থিত নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে তদুপরি লম্ব টান।

নির্দ্দিষ্ট সমতল **ব**'তে | **খগ** টান,

এবং নির্দ্দিষ্ট বিন্দু **ক** হইতে, **কঘ**⊥**খগ** টান।

যদি **কঘ**⊥**ব**, তবে **কঘ**ই ইষ্ট লম্ব।

যদি না হয়, তবে সমতল **ব**'তে**ঘঙ**⊥**খগ** টান,

এবং সমতল **কঘঙ** তে **কচ**⊥**ঘঙ** টান।

তাহা হইলে **কচ**⊥সমতল **ব**।

চজ ॥ **খগ** টান।

তাহা হইলে, ∵ **খঘ**⊥**কঘ** এবং **ঙঘ**,

∴ **খঘ**⊥সমতল **কঘঙ** (৪, উঃ প্রঃ ৪)। এবং **জচ** ॥ **খঘ**।

∴ **জচ**⊥সমতল **কঘঙ** (৪, উঃ প্রঃ ৬)।

∴ **জচ**⊥**কচ**, অর্থাৎ **কচ**⊥**জচ**। এবং **কচ**⊥**ঙঘ**।

∴ **কচ**⊥সমতল **ব** (৪, উঃ প্রঃ ৪)।

অনুমান। এই প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সমতলস্থিত যে কোন বিন্দু **হ** হইতে তদুপরি লম্ব টানিতে পারা যায়।

কারণ, নির্দ্দিষ্ট সমতলের বাহিরে যে কোন বিন্দু **ক** হইতে **কচ**⊥সমতল টানিয়া, **হ** হইতে **হঝ** ॥ **কচ** টানিলে, স্পষ্ট দেখা যায়, **হঝ** ⊥ সমতল।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—২।

ভিন্ন ভিন্ন সমতলস্থিত দুটি ঋজুরেখার উপর একটি লম্ব টান।

নির্দ্দিষ্ট ঋজুরেখাদ্বয়ের কোন একটি **কখ**'তে যে কোন বিন্দু **খ** লইয়া,

খঙ ॥ **গঘ** (অপর নির্দ্দিষ্ট |) টান।

গঘ তে যে কোন বিন্দু **চ** লইয়া, **চজ** ⊥ সমতল **কখঙ** টান।

আর **জহ** ॥ **গঘ** টান,

এবং **কখ** ও **জহ**'র ছেদবিন্দু **হ** হইতে **হঝ** ॥ **জচ** টান।

হঝ ইষ্ট লম্ব।

কারণ, ∵ **হঝ** ॥ **জচ**, এবং **জচ** ⊥ সমতল **কখঙ**,

∴ **হঝ** ⊥ **কখ**।

আবার ∵ **জহ** ॥ **গঘ**, এবং ∠ **জহঝ** = সম ∠,

∴ ∠ **হঝচ** = সম ∠, অর্থাৎ **হঝ** ⊥ **গঘ**।

∴ হঝ ⊥ কখ ও গঘ।

২। সমবাহু সমানকোণী ক্ষেত্রপৃষ্ঠ ঘনায়তন অঙ্কিত করণ।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—৩।

সমবাহু সমানকোণী পৃষ্ঠ পঞ্চ ঘনায়তন অঙ্কিত কর।

১। চতুষ্পৃষ্ঠ।

২। ষট্‌পৃষ্ঠ।

৩। অষ্টপৃষ্ঠ

৪। দ্বাদশপৃষ্ঠ।

৫। বিংশতিপৃষ্ঠ।

কাগজের উপর অঙ্কিত কর,

সমান সমবাহু ত্রিভুজ ৪টি (১ম চিত্রে যথা),

" " ৮টি (৩য় চিত্রে যথা),

" " ২০টি (৫ম চিত্রে যথা),

" সমকোণী চতুর্ভুজ ৬টি (২য় চিত্রে যথা),

" " সমানকোণী পঞ্চভুজ ১২টি (৪র্থ চিত্রে যথা)।

প্রত্যেক চিত্রে, অসংলগ্ন ধার দিয়া কাগজ কাট, এবং সংলগ্ন ধার দিয়া কাগজ ভাঁজ কর, তাহা হইলেই ১ম চিত্রে চতুষ্পৃষ্ঠ, ২য় চিত্রে ষট্‌ পৃষ্ঠ, ৩য় চিত্রে অষ্ট পৃষ্ঠ, ৪র্থ চিত্রে দ্বাদশ পৃষ্ঠ, এবং ৫ম এতে বিংশতিপৃষ্ঠ পাওয়া যাইবে।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ।

অনুশীলনার্থ উদাহরণমালা।

১। কোন ঋজুরেখা কোন সমতলোপরি তাহার প্রক্ষেপণীর সহিত যে সূক্ষ্ম কোণ উৎপন্ন করে, তাহা সেই ঋজুরেখা ও তৎসংলগ্ন সেই সমতল স্থিত অন্য যে কোন ঋজুরেখাব অন্তর্গত সূক্ষ্ম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতব।

২। যদি দুটি সমতলের ছেদবেখার যে কোন বিন্দু হইতে সমতল দ্বয়ের একটির উপর অনেকগুলি ঋজুরেখা টানা যায়, তাহা হইলে তন্মধ্যে যেটি ছেদরেখার উপর লম্ব, অপর সমতলের উপব তাহার অবনতি অন্যান্য রেখার অবনতি অপেক্ষা বৃহত্তব।

৩। দুটি সম্পাতী সমতলেব অন্তর্গত কোণ তাহাদের সম্পাতী লম্বদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান।

৪। যদি কোন ঋজুবেখা দুটি সম্পাতী সমতলের প্রত্যেকেরই সহিত সমান্তর হয়, তাহা হইলে তাহা সমতলদ্বয়েব ছেদ রেখার সহিত সমান্তর হইবে।

৫। যদি কোন ঋজুরেখা দুটি সমান্তর সমতলকে ছেদিত করে, তাহা হইলে সমতলদ্বয়ের সহিত তাহার অবনতি সমান হইবে।

৬। যদি দুটি সমান্তর ঋজুরেখা একটি সমতলকে ছেদিত করে, তাহা হইলে সেই সমতলের উপর তাহাদের অবনতি সমান।

৭। যদি তিনটি সমতল পরস্পরকে ছেদিত করে, তাহা হইলে তাহাদের ছেদরেখাত্রয় একবিন্দুগামী অথবা সমান্তর।

৮। যদি দুটি সমান্তর ঋজুরেখার প্রত্যেকের উপর দিয়া এক একটি সমতল টানা যায়, তাহাদের ছেদবেখা ঐ সমান্তর বেখাদ্বয়ের সহিত সমান্তর হইবে।

৯। সমতল ভূমির উপর রাখিলে, একটি ত্রিপদ টেবিলের তিনপদই ভূমি স্পর্শ করিবে, কিন্তু চতুষ্পদ বা ততোধিক পদ টেবিলের সকল পদগুলি তাহা না করিতে পারে। ইহার কারণ কি?

১০। ত্রিপৃষ্ঠ্য ঘনকোণের যে কোন পৃষ্ঠ্য কোণ অপর পৃষ্ঠ্য কোণদ্বয়ের পরিপূরকের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, ও তাহাদের অন্তর অপেক্ষা বৃহত্তর।

১১। গোলককে যে কোন সমতলদ্বারা ছেদিত করিলে ছেদরেখা বৃত্ত হইবে।

১২। সোজা বৃত্তসূচীর শীর্ষবিন্দুগামী যে কোন সমতলদ্বারা তাহাকে ছেদিত করিলে ছেদরেখা দুটি সম্পাতী ঋজুরেখা হইবে।

১৩। সোজা বৃত্ত সূচীকে সূচীশলাকার উপর লম্ব সমতল দ্বারা ছেদিত করিলে ছেদ রেখা বৃত্ত হইবে।

১৪। একটি পুষ্করিণীর উপর ও তলা উভয়ই আয়ত। সেই আয়ত দ্বয়ের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে দ, দ´, প, প´। পুষ্করিণীর গভীরতা গ। এবং তাহার ঢাল চারিদিকে সমান। তাহা হইলে পুষ্করিণীর খাতের ঘন ফল।

$$= \frac{1}{6}\text{গ} \times \{\text{দপ} + \text{দ}'\text{প}' + (\text{দ} + \text{দ}')(\text{প} + \text{প}')\}।$$

(লীলাবতী, ২২১)।

পরিশিষ্ট।

১। সরল গণিতের ভাগত্রয়ে ব্যবহৃত পারি-ভাষিক শব্দের বর্ণমালানুক্রম সূচী।

বাঙ্গালা শব্দ	ইংরাজি প্রতিশব্দ
অখণ্ড সংখ্যা	Whole number, Integer
অগ্রপদ	Antecedent (of ratio)
অঙ্ক	Figure
অঙ্কন	Construction
অজ্ঞাত	Unknown
অনন্ত	Infinity
অনবচ্ছিন্ন	Abstract
অনুপাত	Ratio
অনুমান	Corollary
অন্তর	Difference
অন্তরঙ্কিত	Inscribed
অন্যোন্যক	Reciprocal
অপরিমেয়	Incommensurable
অযুগ্ম	Odd
অরূপ	Irrational
অবচ্ছিন্ন	Concrete
অবশ্যম্ভাবী	Necessary
অব্যক্ত	Unknown
অষ্টপৃষ্ঠ	Octahedron
অসঙ্গত	Non-congruent
আয়ত	Rectangle
আসন্ন	Approximate
ইষ্ট	Required
উচ্চতা	Altitude
উৎপন্নরাশি	Product
উৎপাদক	Factor
উপপন্ন	Proved
উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা	Theorem

বাঙ্গালা শব্দ	ইংরাজি প্রতিশব্দ
ঋজুরেখা	Straight line
ঋণচিহ্ন	Negative sign
ঋণরাশি	Negative quantity
একক	Unit
একপরিধিস্থ	Concyclic
একবিন্দুগামী	Concurrent
একরেখাস্থ	Collinear
একবর্ণ সরল সমীকরণ	Simple equation with one unknown
একান্তর	Alternate
একান্তর ক্রমে	Alternately. *Alternando*
ঐকিক নিয়ম	Unitary method
করণী	Surd
কর্ণ	Diagonal, Hypotenuse
কল্পনা	Hypothesis
কাল্পনিক	Imaginary
কুব্জ	*Convex*
কুসীদ	Interest
কেন্দ্র	Centre
কোণ	Angle
অন্তরের	interior
একান্তর	alternate
কুব্জ	convex
ঘন	solid
চতুষ্পৃষ্ঠ্য	tetrahedral
ত্রিপৃষ্ঠ্য	trihedral
দ্বিপৃষ্ঠ্য	dihedral
পরিপূরক	supplementary
বিরূপ	re-entrant

কোণ, সন্নিহিত	Angle, adjacent
সম	right
সূক্ষ্ম	acute
স্থূল	obtuse
ক্ষেত্র	Figure
ঋজুরৈখিক	rectilineal
ফল	Area
সদৃশ	Similar figure
সমবাহু সমান কোণী	Regular figure
খণ্ডিনী	Secant
গণিতের সাধ্যাসাধ্যানুমান	Mathematical Induction
গরিষ্ঠ ফল	Maximum
সাধারণ গুণনীয়ক	Greatest Common Measure
গুণক	Multiplier
গুণন	Multiplication
গুণনীয়ক	Measure
গুণিতক	Multiple
গুণ্য	Multiplicand
গোলক	Sphere
ঘন	Solid
কোণ	angle
ক্ষেত্র	Cube
ফল	Volume
মূল	Cube root
ঘাতাবেশ	Involution
চক্রবৃদ্ধি	Compound interest
চতুর্ভুজ	Quadrilateral
চতুষ্পৃষ্ঠ	Tetrahedron
চাপ	Arc
ছেদিনী	Secant
জ্যা	Chord
জ্যামিতি	Geometry
জ্ঞাত	Known
ডিস্কাউন্ট	Discount
ত্রিপৃষ্ঠ্য	Trihedral
ত্রিভুজ	Triangle
বিষমবাহু	scalene
সমদ্বিবাহু	isosceles
সমবাহু	equilateral
ত্রৈরাশিক	Rule of Three
দশমিক	Decimal
পৌনঃপুনিক	recurring
দ্বাদশপৃষ্ঠ	Dodecahedron
দ্বিঘাত অনুপাত	Duplicate ratio
দ্বিপদ	Binomial
শক্তি প্রসারণ	Expansion of power of a binomial (Binomial Theorem)
দ্বিশক্তি সমীকরণ	Quadratic equation
ধনচিহ্ন	Positive sign
রাশি	quantity
নামতা (গুণন)	Multiplication table
নিত্য	Constant
নিয়ত স্থান	Locus
নির্দ্ধারিত	Conventional
নির্ণীত	Known
নির্ণেয়	Unknown
পক্ষ	Side
নয়ন	Transposition
পদ	Term
পরপদ	Consequent (of a ratio)
ঘনায়তন	Solid figure
পরিধি	Circumference
পরিমিতি	Perimeter
পরিমেয়	Commensurable
পরিবৃত্ত	Converse
পাটীগণিত	Arithmetic

পূর্ব্বপদ	Antecedent (of a ratio)
পৃষ্ঠ	Face, surface
পৌনঃপুনিক	Recurring
প্রকৃতি	Coefficient
আক্ষরিক	literal
সাংখ্য	numerical
প্রক্ষেপণী	Projection
প্রস্তাব	Permutation
ফলক	Prism
সোজা	right
বন্ধনী	Bracket
বহুভুজ	Polygon
বাকি	Remainder
বাদ	Subtract
বিন্দু	Point
ভগ্নাংশ	Fraction
অপ্রকৃত	improper
জটিল	complex
প্রকৃত	proper
মিশ্র	mixed
ভাগ	Division
ফল	Quotient
শেষ	Remainder
ভাজক	Divisor
ভাজ্য	Dividend
ভাবনিক রাশি	Imaginary quantity
ভিত্তি	Base of logarithm
ভূমি	Base of triangle or other figure
মধ্যম	Mean
সমান্তর	arithmetic
সমগুণ	geometric
লয়	harmonic
মধ্যসমানুপাতী	Mean proportional
মান	Root (of an equation)
মিশ্রণ	Alligation
মিশ্ররাশি	Mixed quantity
যোগ	Compound addition
বিয়োগ	subtraction
গুণন	multiplication
ভাগ	division
মূল	Root
মূলাকর্ষণ	Extraction of root
মৌলিক সংখ্যা	Prime number
যুগ্ম	Even
যোগ	Addition
ক্রমে	By addition, *Componendo*
যোগফল	Sum
যোজ্য	Summand
রাশি	Quantity, number
রাশিমালা	Expression
রূপরাশি	Rational quantity
রেখা	Line
ঋজু	straight
কুটিল	crooked, curved
লগসংখ্যা	Logarithm
লঘিষ্ঠ ফল	Minimum
লঘিষ্ঠসাধারণ গুণিতক	Least Common Multiple
লঘূকরণ	Reduction
লম্ব	Perpendicular
লয় মধ্যম	Harmonic mean
শ্রেঢ়ী	Harmonical Progression
লব	Numerator
বর্গ	Square
মূল	root
বহিরঙ্কিত	Circumscribed
বিংশতিপৃষ্ঠ	Icosahedron
বিপরিণাম	Variation
বিপর্য্যয়ক্রমে	By inversion, *Invertendo*
বিয়োগ	Subtraction

বিয়োগ ক্রমে — By division, *Dividendo*
ফল — Difference, remainder
বিয়োজন — Minuend
বিয়োজ্য — Subtrahend
বিষমপদ — Dissimilar term
বৃত্ত — Circle
খণ্ড — segment of
বৃত্তচ্ছেদক — Sector
বৃত্ত সূচী — Cone
সোজা — right
বৈষম্য — Inequality
ব্যবকলন — Subtraction
ব্যাস — Diameter
ব্যাসার্দ্ধ — Radius
শক্তি — Power
শক্তি প্রসারণ — Expansion of power
শক্তিসূচক শ্রেঢ়ী — Exponential series
শূন্য — Zero
শৃঙ্খল নিয়ম — Chain Rule
শ্রেঢ়ী — Series
লয় — Harmonical
সমগুণ — Geometrical
সমান্তর — Arithmetical
ষট্পৃষ্ঠ — Hexahedron
ষড়্ভুজ — Hexagon
সংখ্যা — Number
পঠন — Numeration
লিখন — Notation
সংযোগ — Combination
সঙ্কিপ্ত — Contracted (operation)
সঙ্গত — Congruent, consistent
সদৃশ — Similar
সমকোণ — Right angle
সমতল — Plane

সমপদ — Similar term
সমভাবী — Homologous
সমবর্ত্তী — Simultaneous
সমশীল — Homologous
সমষ্টি — Sum
সমসাময়িক — Simultaneous
সমানুপাত — Proportion
সমানুপাতী — Proportional
সমান্তর — Parallel
মধ্যম — Arithmetic mean
শ্রেঢ়ী — Arithmetical Progression
সমীকরণ — Equation
একবর্ণ — with one unknown
দ্বিশক্তি বা বর্গ — Quadratic equation
সরল — Simple equation
সম্পাত — Intersection
সম্পাতী — Intersecting
সম্পাদ্যপ্রতিজ্ঞা — Problem
সাঙ্কেতিক — Practice
সাঙ্কেতিক বাক্য — Formula
সামান্তরিক — Parallelogram
সামান্তরিক পৃষ্ঠ — Parallelopiped
সাম্য — Identity
সিদ্ধান্ত — Conclusion
সূচক — Index
সোজা ফলক — Right Prism
স্তম্ভ — Cylinder
সোজা — right
স্পর্শ — Contact
স্পর্শিনী — Tangent
স্বতঃসিদ্ধ — Axiom
স্বীকৃত কথা — Postulate
হর — Denominator

পরিশিষ্ট।

স্থূল গণিতের ভাগত্রয়ে যে সকল ইংরাজি পারিভাষিক শব্দের বাঙ্গালা প্রতিশব্দ ব্যবহৃত হইয়াছে তাহাদের ইংরাজি বর্ণমালানুক্রম সূচী।

ইংরাজি শব্দ	বাঙ্গালা প্রতিশব্দ
Abstract	অনবচ্ছিন্ন
Addition	যোগ
Alligation	মিশ্রণ নিয়ম
Alternando	একান্তর ক্রমে
Alternate	একান্তর
Altitude	উচ্চতা
Angle	কোণ
acute	সূক্ষ্ম
adjacent	সন্নিহিত
alternate	একান্তর
dihedral	দ্বিপৃষ্ঠ্য
exterior	বাহিরের
interior	অন্তরের
obtuse	স্থূল
re-entrant	বিরূপ
right	সম
solid	ঘন
supplementary	পরিপূরক
tetrahedral	চতুষ্পৃষ্ঠ্য
trihedral	ত্রিপৃষ্ঠ্য
Antecedent	অগ্রপদ, পূর্ব্বপদ
Approximate	আসন্ন
Arc	চাপ
Area	ক্ষেত্রফল
Arithmetic	পাটীগণিত
Arithmetic mean	সমান্তর মধ্যম
Arithmetical Progression	সমান্তর শ্রেঢ়ী
Axiom	স্বতঃসিদ্ধ
Base (of a logarithm)	ভিত্তি
(of a figure)	ভূমি
Binomial	দ্বিপদ
Theorem	শক্তিপ্রসারণ
Bracket	বন্ধনী
Centre	কেন্দ্র
Chain Rule	শৃঙ্খল নিয়ম
Chord	জ্যা
Circle	বৃত্ত
Circumference	পরিধি
Circumscribed	বহিরঙ্কিত
Coefficient	প্রকৃতি
literal	আক্ষরিক
numerical	সাংখ্য
Collinear	এক রেখায়
Combination	সংযোগ
Commensurable	পরিমেয়
Componendo	যোগক্রমে
Compound	
Addition	মিশ্র যোগ
Division	ভাগ
Multiplication	গুণন
Subtraction	বিয়োগ
Concrete	অবচ্ছিন্ন
Concurrent	একবিন্দুগামী
Concyclic	সমপরিধিস্থ

Cone	বৃত্তসূচী
right	সোজা
Congruent	সঙ্গত
Consequent (of a ratio)	পরপদ, পশ্চাৎপদ
Constant	নিত্য
Construction	অঙ্কন
Contact	স্পর্শ
Contracted (operation)	সংক্ষিপ্ত
Converse	পরিবৃত্ত
Convex	কুব্জ
Corollary	অনুমান
Cube	ঘনক্ষেত্র
root	মূল
Decimal	দশমিক
Denominator	হর
Diagonal	কর্ণ
Diameter	ব্যাস
Difference	অন্তর, বাকি
Discount	ডিস্কাউন্ট
Dissimilar	বিষম
Dividend	ভাজ্য
Dividendo	বিয়োগক্রমে
Division	ভাগ
Divisor	ভাজক
Dodecahedron	দ্বাদশপৃষ্ঠ
Duplicate ratio	দ্বিঘাত, দ্বিতীয় অনুপাত
Equation	সমীকরণ
Quadratic	দ্বিশক্তি
Simple	সরল
Simultaneous with one unknown	সমবর্ত্তী একবর্ণ
Expansion of power	শক্তিপ্রসারণ
Exponential series	শক্তিসূচক শ্রেঢী
Expression	অঙ্কমালা
Even	যুগ্ম
Face	পৃষ্ঠ
Factor	উৎপাদক
Figure	অঙ্ক
Figure	ক্ষেত্র
rectilineal	ঋজুরৈখিক
regular	সমবাহু সমানকোণী
Formula	সাঙ্কেতিক বাক্য
Fraction	ভগ্নাংশ
complex	জটিল
improper	অপ্রকৃত
mixed	মিশ্র
proper	প্রকৃত
vulgar	সামান্য
Geometrical Progression	সমগুণ শ্রেঢী
Geometric mean	সমগুণ মধ্যম
Geometry	জ্যামিতি
Greatest Common Measure	গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক
Harmonical Progression	লয় শ্রেঢী
Harmonic mean	লয় মধ্যম
Hexagon	ষড়্ভুজ
Hexahedron	ষটপৃষ্ঠ
Homologous	সমভাবী, সমশীল
Hypotenuse	কর্ণ
Hypothesis	কল্পনা
Icosahedron	বিংশতিপৃষ্ঠ
Identity	সাম্য
Imaginary quantity	কাল্পনিক রাশি, ভাবনিক রাশি

Inclination	অবনতি
Incommensurable	অপরিমেয়
Index	শক্তিসূচক, সূচক
Inequality	বৈষম্য
Infinity	অনন্ত
Inscribed	অন্তর্লিখিত
Integer	অখণ্ড সংখ্যা
Interest	সুদ
Compound	চক্রবৃদ্ধি
Intersection	সম্পাত
Intersecting	সম্পাতী
Inversion	বিপর্য্যয়
Invertendo	বিপর্য্যয় ক্রমে
Involution	ঘাতাবেশ
Irrational quantity	অরূপরাশি
Isosceles triangle	সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ
Known	নির্ণীত
Least Common Multiple	লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক
Line	রেখা
straight	ঋজু
curved	কুটিল
Linear	রৈখিক
Locus	নিয়তস্থান
Logarithm	লগসংখ্যা
Mathematical Induction	গণিতের সামান্যানুমান
Maximum	গরিষ্ঠ ফল
Mean	মধ্যম
arithmetic	সমান্তর
geometric	সমগুণ
harmonic	লয়
proportional	মধ্যসমানুপাতী
Measure	গুণনীয়ক, ভাজক
Minimum	লঘিষ্ঠ ফল
Minuend	বিয়োজন
Mixed quantity	মিশ্ররাশি
Multiple	গুণিতক, ভাজ্য
Multiplicand	গুণ্য
Multiplication	গুণন
Multiplier	গুণক
Multiplication Table	নামতা
Necessary	অবশ্যম্ভাবী
Negative quantity	ঋণরাশি
sign	চিহ্ন
Non-congruent	অসঙ্গত
Notation	অঙ্কলিখন
Number	সংখ্যা, রাশি
Numeration	সংখ্যাপঠন
Numerator	লব
Octagon	অষ্টভুজ
Octahedron	অষ্টপৃষ্ঠ
Odd	অযুগ্ম
Parallel	সমান্তর
Parallelogram	সামান্তরিক
Parallelopiped	সামান্তরিক পৃষ্ঠ
Perimeter	পরিমিতি
Permutation	প্রস্তার
Perpendicular	লম্ব
Plane	সমতল
Point	বিন্দু
Polygon	বহুভুজ
Positive quantity	ধনরাশি
sign	চিহ্ন
Postulate	স্বীকৃত কথা
Power	শক্তি
Practice	সাঙ্কেতিক
Prime number	মৌলিকসংখ্যা
Prism	কলক
Problem	সম্পাদ্যপ্রতিজ্ঞা
Product	গুণফল

Projection প্রক্ষেপণী
Proportion সমানুপাত
Proportional সমানুপাতী
 mean মধ্য
Quadratic equation দ্বিশক্তি সমীকরণ
Quadrilateral চতুর্ভুজ
Quantity রাশি
Quotient ভাগফল
Radius ব্যাসার্দ্ধ
Ratio অনুপাত
Rational quantity রূপরাশি
Reciprocal অন্যোন্যক
Rectangle আয়ত
Rectilineal figure ঋজুরৈখিক ক্ষেত্র
Recurring পৌনঃপুনিক
Reduction লঘূকরণ
Regular figure সমবাহু সমানকোণী ক্ষেত্র
Remainder বিয়োগফল, বাকি
Required ইষ্ট
Right angle সমকোণ
Right cone সোজাবৃত্তসূচী
Right prism সোজাফলক
Root মূল
 of an equation মান
Rule of Three ত্রৈরাশিক
Secant খণ্ডিনী, ছেদিনী
Sector বৃত্তচ্ছেদক
Segment (of a circle) বৃত্তখণ্ড
Series শ্রেঢ়ী
Side বাহু
 of an equation পক্ষ
Similar figure সদৃশক্ষেত্র
Similar term সমপদ
Simple equation একবর্ণসমীকরণ
Simultaneous
 equation সমবর্ত্তী সমীকরণ
Solid ঘন
 angle কোণ
 figure ঘনায়তন
Sphere গোলক, বর্ত্তুল
Square সমচতুর্ভুজ, বর্গক্ষেত্র
 root বর্গমূল
Subtraction বিয়োগ
Sbbtrahend বিয়োজ্য
Sum যোগফল, সমষ্টি
Summand যোজ্য
Surd করণী
Surface পৃষ্ঠ
 plane সমতল
Tangent স্পর্শিনী
Tetrahedron চতুষ্পৃষ্ঠ
Term পদ
 dissimilar বিষম
 similar সম
Theorem উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা
Transposition পক্ষনয়ন, সমশোধন
Triangle ত্রিকোণ, ত্রিভুজ
 equilateral সমবাহু
 isosceles সমদ্বিবাহু
 scalene বিষমবাহু
Trihedral ত্রিপৃষ্ঠ্য
Unitary Method ঐকিক নিয়ম
Unknown
 quantity অব্যক্ত বা নির্ণেয় রাশি
Variation বিপরিণাম
Volume ঘনফল